Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR

Encontro 15: Sistemas Lineares

Objetivos

- Definição
- Introdução
- Solução do sistema
- Método de Gauss

Formas de Resolver Sistemas Lineares

Métodos Diretos:
Solução em número finito de passos:

- Regra de Cramer
- Eliminação de Gauss
- Eliminação com pivotamento
- Decomposição LU
- Inversão de matriz

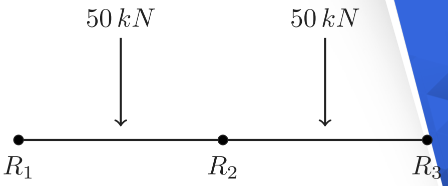
Métodos Iterativos:
Aproximações sucessivas:

- Método de Gauss-Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Método SOR
- Gradiente Conjugado (casos específicos)

Engenharia Civil: Reações em Apoios de Viga

- Uma viga recebe uma carga total de 100 kN.
- A viga está apoiada em três pontos: R_1, R_2 e R_3.
- Deseja-se encontrar as reações nos apoios.
- Sistema:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 = 100 \\ 2R_1 + 4R_2 + 6R_3 = 400 \\ R_1 = R_3 \end{cases}$$

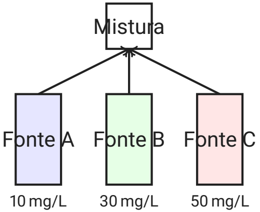


Engenharia Ambiental: Mistura de Fontes de Água

- Objetivo: formar uma mistura com 1000 L de água.
- Três fontes disponíveis:
  - Fonte A: 10 mg/L de poluente
  - Fonte B: 30 mg/L
  - Fonte C: 50 mg/L
- A mistura final deve ter 25 mg/L.
- Restrição técnica: usar mesma quantidade de A e C.

Sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 10x + 30y + 50z = 25000 \\ x = z \end{cases}$$



Sistemas Lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares que devem ser satisfeitas simultaneamente pelas mesmas incógnitas.

Equação linear

Uma equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação que pode ser expressa na forma padrão

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$$

em que $a_1, a_2, ..., a_n$ é chamado de *coeficientes*. O $x_1, x_2, ..., x_i$ são as *incógnitas* e por fim, c é chamado de *termo independente*.

Sistemas Lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = c_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Sistema linear com:

- m equações
- n incógnitas

Exemplos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ -x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x & + & 3y & + & 5w & + & z & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & w & - & 2z & = & -1 \\ 3x & - & 5y & & & & & = & 5 \end{cases}$$

Equação Linear Homogênea

- Uma equação linear é dita **homogênea** quando seu termo independente é igual a zero:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

- Se o termo independente $c \neq 0$, a equação é **não homogênea**.
- Um sistema linear é **homogêneo** quando **todas as equações** que o compõem são homogêneas.

Exemplos:

- $x + 2y - 4z = 7$ $\rightarrow$ **não homogênea**
- $-x - 5z = 15$ $\rightarrow$ **não homogênea**
- $t + 2u + 3v = 0$ $\rightarrow$ **homogênea**

Obs.: Somente a última equação acima é homogênea. Para que um sistema seja homogêneo, todas devem ter zero no lado direito.

Sistemas Lineares

Solução do sistema

$$(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sistema linear homogêneo:
Exemplo:

$$\begin{cases} 5x & - & y & - & 4z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & 3z & = & 0 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Vamos validar com:

$$(0, 0, 0)$$
$$(0, 1, -1)$$
$$(1, 1, 1)$$

Classificação dos Sistemas Lineares

Um sistema linear pode ser classificado em três tipos:

- **Possível e Determinado:** possui uma única solução.
- **Possível e Indeterminado:** possui infinitas soluções.
- **Impossível:** não possui solução.

Dica visual: para sistemas com duas equações e duas incógnitas, pense nas retas:

- Uma interseção $\rightarrow$ solução única;
- Retas coincidentes $\rightarrow$ infinitas soluções;
- Retas paralelas $\rightarrow$ nenhuma solução.

Sistema Impossível (sem solução)

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Ao subtrair as equações:

$$(x + y) - (x + y) = 2 - 5 \Rightarrow 0 = -3$$

Conclusão

Sistema **impossível**, pois há contradição. As retas são paralelas.

Sistema Possível e Indeterminado (infinitas soluções)

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

A segunda equação é múltiplo da primeira:

$$2(x + y) = 2 \cdot 3 = 6$$

> **Conclusão**
> Sistema **possível e indeterminado**, pois as equações são equivalentes. Ambas representam a mesma reta.

Método de Cramer – Conceito e Etapas

Aplicação: sistemas lineares com o mesmo número de equações e incógnitas (sistemas quadrados), com $\det(A) \neq 0$.

Objetivo: resolver o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$

Passos do método:

1. Calcular o determinante da matriz dos coeficientes $\det(A)$
2. Para cada incógnita x_i, substituir a coluna i de A pelo vetor dos termos independentes b, formando a matriz A_i
3. Calcular $\det(A_i)$
4. Obter cada incógnita pela fórmula:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Determinante de matriz 2×2 – Visual com Diagonais

Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

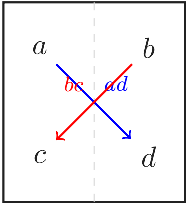
Fórmula:

$$\det(A) = ad - bc$$

Interpretação:

- Diagonal principal (a $\rightarrow$ d): $a \cdot d$
- Diagonal secundária (b $\rightarrow$ c): $b \cdot c$

$$\boxed{\det(A) = a \cdot d - b \cdot c}$$



Método de Cramer – Representação para 2 incógnitas

Sistema genérico:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Fórmulas para a solução:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Observação

O método é eficiente apenas para sistemas pequenos. Em sistemas maiores, métodos como eliminação de Gauss são mais indicados.

Exemplo – Resolução com Regra de Cramer

Sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$

Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Determinante de A:

$$\det(A) = 2\cdot(-1) - 4\cdot 3 = -2 - 12 = -14$$

Matriz A_1:

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 8\cdot(-1) - 10\cdot 3 = -8 - 30 = -38$$

Matriz A_2:

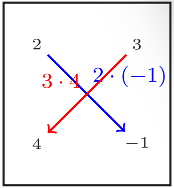
$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 2\cdot 10 - 4\cdot 8 = 20 - 32 = -12$$

Solução:

$$x = \frac{-38}{-14} = \frac{19}{7} \quad y = \frac{-12}{-14} = \frac{6}{7}$$

$$\boxed{x = \frac{19}{7}, \quad y = \frac{6}{7}}$$

Visualização: cálculo de $\det(A)$



$$\det(A) = -2 - 12 = -14$$

Método de Sarrus

Aplicação: cálculo do determinante de matrizes 3×3.

Passos do método:

1. Escreva a matriz original.
2. Repita as duas primeiras colunas à direita.
3. Multiplique as diagonais descendentes e some os produtos.
4. Multiplique as diagonais ascendentes e some os produtos.
5. Subtraia os dois resultados.

Fórmula:

$$\det(A) = aei + bfg + cdh \; - \; ceg + bdi + afh$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Etapas:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

Diagonais:

$$1{\cdot}(-1){\cdot}0 = 0, \quad 2{\cdot}4{\cdot}2 = 16, \quad 3{\cdot}0{\cdot}1 = 0 \Rightarrow \color{blue}{Soma = 16}$$

Diagonais:

$$3{\cdot}(-1){\cdot}2 = -6, \quad 1{\cdot}4{\cdot}1 = 4, \quad 2{\cdot}0{\cdot}0 = 0 \Rightarrow \color{red}{Soma = -2}$$

$$\boxed{\det(A) = 16 - (-2) = \mathbf{18}}$$

Sistemas Lineares

Método da Eliminação de Gauss

Processo

Consiste em transformar o sistema $Ax = b$ em um sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, por meio de transformações elementares nas linhas.

$$\boxed{Ax = b} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{A}x = \tilde{b}}$$

Por que usar Gauss?

Problema:

- Sistemas grandes são difíceis de resolver
- Substituição fica inviável

Solução:

- Eliminar variáveis passo a passo

Sistemas Lineares

Método da Eliminação de Gauss

Teorema

Seja $Ax = b$ um sistema linear, se:

1. Trocarmos duas equações;
2. Multiplicarmos uma equação por uma constante não-nula;
3. Adicionarmos um múltiplo de uma equação a outra equação.

O método da eliminação de Gauss engloba duas fases:

1. Fase de eliminação;
2. Fase de substituição.

Sistemas Lineares

1. Fase de eliminação

1. Transformações elementares na matriz aumentada $[A|b]$
2. Para uma matriz $(n \times n)$ este processo terá $(n-1)$ etapas

Procedimento

1. Montar a matriz aumenta $[A|b]$
2. Determinação do pivô: a_{kk}
3. Definir os multiplicadores de linha

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

4. Atualização das linhas

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} \times L_{\text{pivô}}$$

Exemplo Simples

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Pergunta: Como resolver isso sistematicamente?

Forma Matricial

$$A \cdot x = b$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Agora vamos trabalhar com linhas.

Ideia do Método de Gauss

Transformar o sistema em um mais simples.

Objetivo:

Matriz triangular

Gauss - Passo 1

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

Gauss - Passo 2

$$-2y = -2 \Rightarrow y = 1$$

Gauss - Passo 3

$$x + y = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$(x, y) = (2, 1)$$

O que fizemos?

- Eliminamos variáveis
- Simplificamos o sistema
- Resolvemos de baixo para cima

Escalonamento

Escalonar:
Transformar a matriz em forma triangular

Gauss:
Método que faz o escalonamento

Importante

Durante o método podem aparecer:

$$0 = 3 \quad \Rightarrow \text{sem solução}$$

$$0 = 0 \quad \Rightarrow \text{infinitas soluções}$$

Comparação de Métodos

- Substituição $\rightarrow$ simples, mas limitado
- Cramer $\rightarrow$ funciona, mas pesado
- Gauss $\rightarrow$ usado na prática

Exercício

Resolva:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

$$A^{(0)}|b^{(0)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Sistemas Lineares

Passo 1: Quem é o pivô? Tudo abaixo do pivô deverá ser zero.

Pivô

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & \vdots & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

Concluído para a primeira coluna. Repetir agora para a segunda coluna. Trocar o pivô.

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & \vdots & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

Passo 2: Operar nas linhas

$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & \vdots & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{bmatrix}$$

Concluído, valores abaixo da diagonal são zeros.

Sistemas Lineares

Passo 3: Reescrever o sistema e resolver

Sistema reescrito

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & & & 3x_4 & = & 4 \\ & - & x_2 & - & x_3 & - & 5x_4 & = & -7 \\ & & & - & 3x_3 & + & 13x_4 & = & 13 \\ & & & & & - & 13x_4 & = & -13 \end{cases}$$

Agora basta calcular os valores de x_1, x_2, x_3 e x_4.

Sistemas Lineares

Fase da substituição

Substituindo uma equação na outra...

Sistema reescrito

- Equação (4): $-13x_4 = -13 \Rightarrow x_4 = 1$
- Equação (3): $3x_3 + 13 = 13 \Rightarrow x_3 = 0$
- Equação (2): $-x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \Rightarrow x_2 = 2$
- Equação (1): $x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \Rightarrow x_1 = -1$

Lista de Exercícios – Sistemas Lineares

Exercício 1:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 10 \end{cases}$$

Exercício 2:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Exercício 3:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Exercício 4:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 13 \end{cases}$$

Exercício 1 – Resolução com Regra de Cramer

1. Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

2. Determinante de A:

$$\det(A) = (2)(-1) - (4)(3) = -2 - 12 = -14$$

3. Matriz A_1:
(substitui 1ª coluna por b)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = (8)(-1) - (10)(3) = -8 - 30 = -38$$

4. Matriz A_2:
(substitui 2ª coluna por b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (2)(10) - (4)(8) = 20 - 32 = -12$$

5. Solução final:

$$x = \frac{-38}{-14} = \frac{19}{7}, \quad y = \frac{-12}{-14} = \frac{6}{7}$$

$$\boxed{x = \frac{19}{7}, \quad y = \frac{6}{7}}$$

Exercício 2 – Resolução com Regra de Cramer

1. Matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2. Determinante de A:

$$\det(A) = (1)(1) - (3)(-2) = 1 + 6 = 7$$

3. Matriz A_1:
(substitui 1ª coluna por b)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_1) = (1)(1) - (7)(-2) = 1 + 14 = 15$$

4. Matriz A_2:
(substitui 2ª coluna por b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det(A_2) = (1)(7) - (3)(1) = 7 - 3 = 4$$

5. Solução final:

$$x = \frac{15}{7}, \quad y = \frac{4}{7}$$

$$\boxed{x = \frac{15}{7}, \quad y = \frac{4}{7}}$$

Exercício 3 – Resolução com Eliminação de Gauss

1. Montar a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \text{troca } L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

2. Eliminação de Gauss:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -10 & -5 \end{array}\right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

3. Substituição regressiva:

$$x_3 = 0, \quad -x_2 = -5 \Rightarrow x_2 = 5, \quad x_1 + 5 = 2 \Rightarrow x_1 = -3$$

Solução final:

$$\boxed{x_1 = -3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0}$$

Exercício 4 – Resolução com Eliminação de Gauss

2. Matriz aumentada inicial:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 13 \end{array}\right]$$

3. Eliminação na 1ª coluna:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

4. Eliminação na 2ª coluna:

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

5. Eliminação na 3ª coluna:

$$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{5}L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

6. Substituição regressiva:

$$x_4 = 2$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

Solução final:

$$\boxed{x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 2}$$

Importante!

Este material é exclusivo de uso do autor. Proibido copiar ou replicar.

rogeriovargas@ufpr.br

rogerio.in

UFPR

Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR