

# Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

**Prof. Dr. Rogério Vargas<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Centro de Estudos do Mar  
Universidade Federal do Paraná

2026



# Encontro 16: Sistemas Lineares

# Objetivos

- Entender métodos iterativos
- Definir critério de parada
- Aplicar o método de Gauss-Jacobi
- Comparar a ideia com Gauss-Seidel



# Métodos diretos e métodos iterativos

Na resolução de sistemas lineares, podemos usar dois tipos principais de métodos:

## Métodos diretos

Encontram a solução após uma sequência finita de operações.

Exemplo: eliminação de Gauss.

## Métodos iterativos

Começam com uma aproximação inicial e melhoram a solução passo a passo.

Exemplos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

# Ideia dos métodos iterativos

Nos métodos iterativos, não encontramos a solução de uma vez.

Começamos com um chute inicial:

$$x^{(0)}$$

Depois calculamos uma nova aproximação:

$$x^{(1)}$$

Em seguida:

$$x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, \dots$$

## Ideia central

O método para quando a diferença entre duas aproximações consecutivas fica pequena.

# Critério de parada

Podemos usar o critério de parada/convergência para os métodos iterativos.

A ideia é comparar a solução nova com a solução anterior.

## Erro relativo aproximado

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|}$$

- Se  $\varepsilon$  for grande, continuamos iterando.
- Se  $\varepsilon$  for pequeno, paramos.

# Critério de parada

Neste encontro, vamos usar:

$$\varepsilon < 0,1$$

## Interpretação

Quando a mudança relativa entre duas aproximações consecutivas for menor que 0,1, consideraremos que o método convergiu.

Ou seja:

$$\frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|} < 0,1$$

# Gauss-Jacobi

O método de Gauss-Jacobi é um método iterativo para resolver sistemas lineares.

A ideia é transformar cada equação do sistema em uma fórmula para calcular uma variável.

## Ideia

Isolamos cada incógnita em sua respectiva equação.

Por exemplo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

pode ser reescrita como:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

# Gauss-Jacobi



Considere o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

No Gauss-Jacobi, isolamos as variáveis:

$$x_1 = \frac{7 - 2x_2 - x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{-8 - x_1 - x_3}{5}$$

$$x_3 = \frac{6 - 2x_1 - 3x_2}{10}$$

# Gauss-Jacobi: chute inicial

Para começar o método, precisamos escolher uma aproximação inicial.

Vamos usar:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Ou seja:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

## Observação

O chute inicial não precisa ser a solução correta. Ele serve apenas como ponto de partida.

# Gauss-Jacobi: primeira iteração

Usando:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

temos:

$$x_1^{(1)} = \frac{7 - 2(0) - 0}{10} = 0,7$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-8 - 0 - 0}{5} = -1,6$$

$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 2(0) - 3(0)}{10} = 0,6$$

Portanto:

$$x^{(1)} = (0,7, -1,6, 0,6)$$

# Gauss-Jacobi: segunda iteração



Agora usamos os valores da iteração anterior:

$$x^{(1)} = (0, 7, -1, 6, 0, 6)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7 - 2(-1, 6) - 0, 6}{10} = \frac{9, 6}{10} = 0, 96$$

$$x_3^{(2)} = \frac{6 - 2(0, 7) - 3(-1, 6)}{10} = \frac{9, 4}{10} = 0, 94$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-8 - 0, 7 - 0, 6}{5} = \frac{-9, 3}{5} = -1, 86$$

Portanto:

$$x^{(2)} = (0, 96, -1, 86, 0, 94)$$

# Gauss-Jacobi: cálculo do erro

Temos a fórmula do erro:

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|}$$

Para esta etapa:

$$x^{(1)} = (0, 7, -1, 6, 0, 6)$$

$$x^{(2)} = (0, 96, -1, 86, 0, 94)$$

Numerador:

$$\max |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|$$

$$= \max(0, 26; 0, 26; 0, 34)$$

Denominador:

$$\max |x_i^{(2)}|$$

$$= \max(|0, 96|; |-1, 86|; |0, 94|)$$

# Gauss-Jacobi: decisão de parada

Substituindo na fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|}{\max |x_i^{(2)}|}$$

$$\varepsilon = \frac{0,34}{1,86}$$

$$\varepsilon \approx 0,183$$

Como o critério definido foi:

$$\varepsilon < 0,1$$

temos:

$$0,183 > 0,1$$

**Ainda não podemos parar. Precisamos fazer mais uma iteração.**

# Gauss-Jacobi: terceira iteração



Usando:

$$x^{(2)} = (0,96, -1,86, 0,94)$$

$$x_1^{(3)} = \frac{7 - 2(-1,86) - 0,94}{10} = 0,978$$

$$x_3^{(3)} = \frac{6 - 2(0,96) - 3(-1,86)}{10} = 0,966$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-8 - 0,96 - 0,94}{5} = -1,98$$

Portanto:

$$x^{(3)} = (0,978, -1,98, 0,966)$$

# Gauss-Jacobi: erro da terceira iteração

Temos:

$$x^{(2)} = (0,96, -1,86, 0,94)$$

$$x^{(3)} = (0,978, -1,98, 0,966)$$

Diferenças:

$$|0,978 - 0,96| = 0,018$$

$$|-1,98 + 1,86| = 0,12$$

$$|0,966 - 0,94| = 0,026$$

Maior diferença:

$$\max |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0,12$$

Maior valor da nova aproximação:

$$\max |x_i^{(3)}| = 1,98$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{0,12}{1,98} \approx 0,061$$

$$0,061 < 0,1$$

# Gauss-Jacobi: conclusão do exemplo

Como:

$$\varepsilon \approx 0,061 < 0,1$$

o método atingiu o critério de parada.

## Resultado aproximado

$$x_1 \approx 0,978$$

$$x_2 \approx -1,98$$

$$x_3 \approx 0,966$$

## Número de iterações

O método convergiu em:

3 iterações

## Critério usado

$$\varepsilon < 0,1$$

# Forma matricial do Gauss-Jacobi

O sistema linear pode ser escrito como:

$$Ax = b$$

No método de Gauss-Jacobi, decompomos a matriz  $A$  em:

$$A = D + L + U$$

onde:

- $D$  é a matriz diagonal;
- $L$  é a parte inferior da matriz;
- $U$  é a parte superior da matriz.

# Forma matricial do Gauss-Jacobi

A fórmula matricial do método é:

## Gauss-Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1} \left( b - (L + U)x^{(k)} \right)$$

## Observação importante

Essa fórmula é apenas uma forma compacta de representar o processo de isolar cada variável e calcular uma nova aproximação.

# Gauss-Jacobi: algoritmo

1. Escolher uma aproximação inicial  $x^{(0)}$ .
2. Isolar cada variável do sistema.
3. Calcular uma nova aproximação  $x^{(k+1)}$ .
4. Calcular o erro.
5. Se o erro for menor que a tolerância, parar.
6. Caso contrário, repetir o processo.

## Nesta aula

Usamos  $x^{(0)} = (0, 0, 0)$  e  $\varepsilon < 0, 1$ .

# Exercício

Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jacobi.

## Sistema linear

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17 \end{cases}$$

Use:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Critério de parada:

$$\varepsilon < 0,1$$

## Objetivo

Determine a aproximação final e o número de iterações.

# Exercício: primeiro passo

Isole cada variável do sistema:

$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 = \frac{2 - x_2 - x_3}{-3}$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$$

$$x_2 = \frac{5 - x_1 - x_3}{5}$$

$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17$$

$$x_3 = \frac{-17 - x_1 - 3x_2}{7}$$

## Próximo passo

Usar:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

e iniciar as iterações.

# Exercício: resultado esperado



Usando:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

e critério:

$$\varepsilon < 0,1$$

o método converge em:

3 iterações

## Aproximação obtida

$$x_1 \approx -1,048$$

$$x_2 \approx 1,781$$

$$x_3 \approx -2,959$$

# Importante!

**Este material é exclusivo de uso do autor. Proibido copiar ou replicar.**

rogeriovargas@ufpr.br



# Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

**Prof. Dr. Rogério Vargas<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Centro de Estudos do Mar  
Universidade Federal do Paraná

2026