Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR

Encontro 24: Interpoladores

Ligação com a aula anterior

O que fizemos na aula anterior?

Na aula anterior, usamos o **interpolador linear** para inserir pontos intermediários entre pontos conhecidos.

Regra computacional

Percorrer os pontos consecutivos e inserir novos pontos quando a distância entre eles for maior que 2 unidades.

O que faremos nesta aula?

Vamos manter o mesmo problema e comparar outros interpoladores:

- Interpolador de Lagrange;
- Interpolador de Newton;
- Splines.

Coordenadas iniciais

Ponto	x	y
P_1	1,56	1,56
P_2	3,75	0,58
P_3	5,99	8,66
P_4	7,32	6,01
P_5	9,51	7,08

Objetivo computacional

Percorrer os pontos consecutivos e inserir novos pontos quando a distância entre eles for maior que 2 unidades.

Distância entre dois pontos

Distância euclidiana

Dados dois pontos:

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2),$$

a distância entre eles é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Uso no algoritmo

Se $d > 2$, o segmento será subdividido em partes menores.

Quantidade de partes

$$m = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$$

Assim, cada novo trecho terá comprimento aproximado:

$$\frac{d}{m} \leq 2.$$

Cálculo das distâncias

Segmento	Distância d	Partes $m = \lceil d/2 \rceil$	Distância por parte
P_1P_2	$2{,}399$	2	$1{,}200$
P_2P_3	$8{,}385$	5	$1{,}677$
P_3P_4	$2{,}965$	2	$1{,}483$
P_4P_5	$2{,}437$	2	$1{,}219$

Conclusão

Todos os segmentos têm distância maior que 2, portanto todos serão subdivididos.

Como surgem os novos pontos?

Ideia geométrica

Quando a distância entre dois pontos consecutivos é maior que 2, subdividimos o **segmento de reta** que une esses pontos em partes iguais.

Mensagem importante

Os novos pontos aparecem porque avançamos proporcionalmente em x e em y ao longo do segmento.

Novas coordenadas

$$P_i = (x_i, y_i)$$

e

$$P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}),$$

se o segmento for dividido em m partes, então:

$$x_k = x_i + k \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{m}$$

$$y_k = y_i + k \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{m}$$

com:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Exemplo: subdividindo o segmento P_2P_3

Temos os pontos: $P_2 = (3{,}750,\ 0{,}580)$ e $P_3 = (5{,}990,\ 8{,}660)$
A distância entre eles é maior que 2, então o segmento foi dividido em: $m = 5$.
Isso significa que o segmento será dividido em **5 partes iguais**.

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Atenção
Como $m = 5$, temos 5 partes, mas apenas **4 novos pontos internos**.
Os valores $k = 0$ e $k = 5$ representam os pontos que já existiam:

$$k = 0 \Rightarrow P_2 \qquad k = 5 \Rightarrow P_3$$

Calculando o avanço em x e em y

Para o segmento P_2P_3, temos:

$$P_2 = (3{,}750,\ 0{,}580) \qquad P_3 = (5{,}990,\ 8{,}660)$$

Como $m = 5$, calculamos o avanço em cada coordenada:

$$\Delta x = \frac{x_{i+1} - x_i}{m} = \frac{5{,}990 - 3{,}750}{5} = \frac{2{,}240}{5} = 0{,}448$$

$$\Delta y = \frac{y_{i+1} - y_i}{m} = \frac{8{,}660 - 0{,}580}{5} = \frac{8{,}080}{5} = 1{,}616$$

Interpretação

A cada passo, avançamos:

$0{,}448$ em x e $1{,}616$ em y.

Gerando os novos pontos de P_2 até P_3

Usamos: $x_k = 3{,}750 + k \cdot 0{,}448$ e $y_k = 0{,}580 + k \cdot 1{,}616$
com:

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

k	Ponto	x_k	y_k
0	P_2	3,750	0,580
1	Q_2	4,198	2,196
2	Q_3	4,646	3,812
3	Q_4	5,094	5,428
4	Q_5	5,542	7,044
5	P_3	5,990	8,660

Resumo
A sequência gerada é:

$$P_2 \to Q_2 \to Q_3 \to Q_4 \to Q_5 \to P_3$$

Novos pontos gerados pela subdivisão

Ponto	Segmento de origem	x	y	Distância ao anterior
P_1	–	1,560	1,560	–
Q_1	P_1P_2	2,655	1,070	1,200
P_2	P_1P_2	3,750	0,580	1,200
Q_2	P_2P_3	4,198	2,196	1,677
Q_3	P_2P_3	4,646	3,812	1,677
Q_4	P_2P_3	5,094	5,428	1,677
Q_5	P_2P_3	5,542	7,044	1,677
P_3	P_2P_3	5,990	8,660	1,677
Q_6	P_3P_4	6,655	7,335	1,483
P_4	P_3P_4	7,320	6,010	1,483
Q_7	P_4P_5	8,415	6,545	1,219
P_5	P_4P_5	9,510	7,080	1,219

Leitura da tabela

Cada linha mostra a nova coordenada gerada e a distância entre ela e o ponto imediatamente anterior.

Valores de x para os interpoladores

Valores de x obtidos a partir da subdivisão

A partir das coordenadas geradas, usaremos os seguintes valores de x:

$$1{,}56, \quad 2{,}655, \quad 3{,}75, \quad 4{,}198, \quad 4{,}646, \quad 5{,}094,$$

$$5{,}542, \quad 5{,}99, \quad 6{,}655, \quad 7{,}32, \quad 8{,}415, \quad 9{,}51.$$

Ideia da comparação

Na interpolação linear, os valores de y são os da própria tabela de subdivisão. Agora, usaremos esses mesmos valores de x e calcularemos novos valores de y com Lagrange, Newton e Spline Cúbica.

Observação importante

Para alguns interpoladores, a distância euclidiana entre pontos consecutivos pode não ficar exatamente limitada a 2, pois a curva deixa de ser o segmento de reta usado na subdivisão original.

Interpolador de Lagrange: ideia

Ideia principal

O método de Lagrange constrói um único polinômio que passa por todos os pontos conhecidos.

No nosso exemplo

Temos 5 pontos:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5.$$

Logo, o polinômio interpolador terá grau no máximo 4:

$$P_4(x).$$

Atenção

Esse polinômio é global: ele usa todos os pontos ao mesmo tempo.

Pontos usados no interpolador

i	x_i	y_i
0	1,56	1,56
1	3,75	0,58
2	5,99	8,66
3	7,32	6,01
4	9,51	7,08

Observação

Como temos 5 pontos, usamos $i = 0, 1, 2, 3, 4$ e obtemos um polinômio de grau no máximo 4.

Fórmula geral de Lagrange

O polinômio interpolador é:

$$P_4(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x)$$

onde cada base é:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ideia importante

Cada $L_i(x)$ vale 1 no ponto x_i e vale 0 nos outros pontos.

Montando a base $L_0(x)$

A base $L_0(x)$ está associada ao ponto:

$$x_0 = 1{,}56.$$

Por isso, usamos todos os outros valores de x no numerador:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

Substituindo:

$$L_0(x) = \frac{(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)(x - 9{,}51)}{(1{,}56 - 3{,}75)(1{,}56 - 5{,}99)(1{,}56 - 7{,}32)(1{,}56 - 9{,}51)}$$

Calculando o denominador de $L_0(x)$

$$(1{,}56 - 3{,}75)(1{,}56 - 5{,}99)(1{,}56 - 7{,}32)(1{,}56 - 9{,}51)$$

$$= (-2{,}19)(-4{,}43)(-5{,}76)(-7{,}95)$$

$$(-2{,}19)(-4{,}43) = 9{,}7017$$

$$(-5{,}76)(-7{,}95) = 45{,}792$$

$$9{,}7017 \cdot 45{,}792 \approx 444{,}24$$

Logo:

$$L_0(x) = \frac{(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)(x - 9{,}51)}{444{,}24}$$

Denominadores das bases de Lagrange

Base	Produto do denominador	Valor aproximado
L_0	$(1{,}56 - 3{,}75)(1{,}56 - 5{,}99)(1{,}56 - 7{,}32)(1{,}56 - 9{,}51)$	$444{,}24$
L_1	$(3{,}75 - 1{,}56)(3{,}75 - 5{,}99)(3{,}75 - 7{,}32)(3{,}75 - 9{,}51)$	$-100{,}83$
L_2	$(5{,}99 - 1{,}56)(5{,}99 - 3{,}75)(5{,}99 - 7{,}32)(5{,}99 - 9{,}51)$	$46{,}42$
L_3	$(7{,}32 - 1{,}56)(7{,}32 - 3{,}75)(7{,}32 - 5{,}99)(7{,}32 - 9{,}51)$	$-59{,}88$
L_4	$(9{,}51 - 1{,}56)(9{,}51 - 3{,}75)(9{,}51 - 5{,}99)(9{,}51 - 7{,}32)$	$352{,}96$

Bases de Lagrange obtidas I

$$L_0(x) = \frac{(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{444{,}24}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1{,}56)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{-100{,}83}$$

Como interpretar?

A base L_0 está associada ao ponto $x_0 = 1{,}56$.
A base L_1 está associada ao ponto $x_1 = 3{,}75$.

Bases de Lagrange obtidas II

$$L_2(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 7{,}32)(x - 9{,}51)}{46{,}42}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 9{,}51)}{-59{,}88}$$

$$L_4(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)}{352{,}96}$$

Próximo passo

Agora multiplicamos cada base pelo valor correspondente de y_i.

Montando o polinômio

A forma geral é:

$$P_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x)$$

Como:

$$y_0 = 1{,}56, \quad y_1 = 0{,}58, \quad y_2 = 8{,}66, \quad y_3 = 6{,}01, \quad y_4 = 7{,}08,$$

temos:

$$P_4(x) = 1{,}56 L_0(x) + 0{,}58 L_1(x) + 8{,}66 L_2(x) + 6{,}01 L_3(x) + 7{,}08 L_4(x)$$

Ideia

Cada termo $y_i L_i(x)$ contribui para que o polinômio passe pelo ponto (x_i, y_i).

Substituindo as bases I

$$P_4(x) = 1{,}56\frac{(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{444{,}24}$$

$$+0{,}58\frac{(x-1{,}56)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{-100{,}83}$$

Leitura
Esses são os dois primeiros termos do polinômio de Lagrange.

Substituindo as bases II

$$+8{,}66\frac{(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{46{,}42}$$

$$+6{,}01\frac{(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-9{,}51)}{-59{,}88}$$

$$+7{,}08\frac{(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)}{352{,}96}$$

Resultado

Somando os cinco termos, temos o polinômio interpolador de Lagrange.

Por que aparece uma forma expandida?

Forma de Lagrange

A forma de Lagrange é boa para entender a construção:

$$P_4(x) = \sum^{4} y_i L_i(x)$$

Forma expandida

Para calcular rapidamente vários valores, podemos expandir os produtos e agrupar os termos:

$$P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Observação

A expansão é longa. Por isso, normalmente usamos apoio computacional ou calculadora simbólica.

Polinômio de Lagrange obtido

Forma fatorada

A forma anterior é a forma de Lagrange:

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{4} y_i L_i(x).$$

Forma expandida aproximada

Expandindo os produtos e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$P_4(x) = 0{,}103886x^4 - 2{,}365575x^3 + 18{,}293067x^2$$

$$-53{,}822132x + 49{,}369971.$$

Observação

A expansão manual é longa. O mais importante é entender que as duas formas representam o mesmo polinômio interpolador.

Como conferir o polinômio?

O polinômio interpolador deve passar pelos pontos originais.

$$P_4(1{,}56) \approx 1{,}56$$

$$P_4(3{,}75) \approx 0{,}58$$

$$P_4(5{,}99) \approx 8{,}66$$

$$P_4(7{,}32) \approx 6{,}01$$

$$P_4(9{,}51) \approx 7{,}08$$

Ideia importante

Se o polinômio não passa pelos pontos originais, houve erro no cálculo.

Como usar o polinômio?

Depois de obter:

$$P_4(x) = 0{,}103886x^4 - 2{,}365575x^3 + 18{,}293067x^2$$

$$-53{,}822132x + 49{,}369971$$

basta substituir o valor de x desejado.

Exemplo

Para estimar o valor em $x = 4{,}20$:

$$P_4(4{,}20) = 0{,}103886(4{,}20)^4 - 2{,}365575(4{,}20)^3$$

$$+18{,}293067(4{,}20)^2 - 53{,}822132(4{,}20) + 49{,}369971.$$

Novos pontos usando Lagrange

Valores calculados

x	$P_4(x)$
1,560	1,560
2,655	−3,690
3,750	0,580
4,198	3,061
4,646	5,345
5,094	7,145

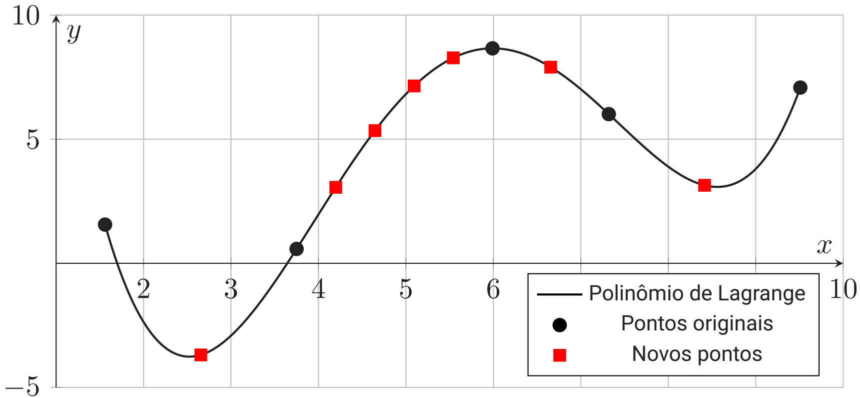
Continuação

x	$P_4(x)$
5,542	8,278
5,990	8,660
6,655	7,903
7,320	6,010
8,415	3,143
9,510	7,080

Atenção

O valor em $x = 2{,}655$ ficou negativo. Isso mostra que polinômios globais podem oscilar.

Gráfico dos novos pontos usando Lagrange



Observação

O polinômio global passa pelos pontos originais, mas pode oscilar nos intervalos intermediários.

Interpolador de Newton: ideia

Ideia principal

O método de Newton constrói o mesmo polinômio interpolador de Lagrange, mas usando uma tabela de diferenças divididas.

Forma de Newton

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Importante

Lagrange e Newton geram o mesmo polinômio. A diferença está na forma de calcular e escrever esse polinômio.

Pontos usados no método de Newton

i	x_i	$f[x_i] = y_i$
0	1,56	1,56
1	3,75	0,58
2	5,99	8,66
3	7,32	6,01
4	9,51	7,08

Objetivo

Calcular os coeficientes:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

usando diferenças divididas.

Primeira diferença dividida

Fórmula

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Interpretação

A primeira diferença dividida é parecida com o coeficiente angular da reta entre dois pontos.

Exemplo entre x_0 e x_1

$$f[x_0, x_1] = \frac{0{,}58 - 1{,}56}{3{,}75 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{-0{,}98}{2{,}19} \approx -0{,}447489$$

Primeiras diferenças divididas

$$f[x_0, x_1] = \frac{0{,}58 - 1{,}56}{3{,}75 - 1{,}56} = \frac{-0{,}98}{2{,}19} \approx -0{,}447489$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{8{,}66 - 0{,}58}{5{,}99 - 3{,}75} = \frac{8{,}08}{2{,}24} \approx 3{,}607143$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{6{,}01 - 8{,}66}{7{,}32 - 5{,}99} = \frac{-2{,}65}{1{,}33} \approx -1{,}992481$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{7{,}08 - 6{,}01}{9{,}51 - 7{,}32} = \frac{1{,}07}{2{,}19} \approx 0{,}488584$$

Segunda diferença dividida

Fórmula

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Exemplo

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3{,}607143 - (-0{,}447489)}{5{,}99 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{4{,}054632}{4{,}43} \approx 0{,}915267$$

Segunda diferenças divididas

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3{,}607143 - (-0{,}447489)}{5{,}99 - 1{,}56} \approx 0{,}915267$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-1{,}992481 - 3{,}607143}{7{,}32 - 3{,}75}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-5{,}599624}{3{,}57} \approx -1{,}568522$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}488584 - (-1{,}992481)}{9{,}51 - 5{,}99}$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{2{,}481065}{3{,}52} \approx 0{,}704848$$

Terceira diferença dividida

Fórmula

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}$$

Primeira terceira diferença

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1{,}568522 - 0{,}915267}{7{,}32 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-2{,}483789}{5{,}76} \approx -0{,}431213$$

Terceira diferença dividida

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1{,}568522 - 0{,}915267}{7{,}32 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] \approx -0{,}431213$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}704848 - (-1{,}568522)}{9{,}51 - 3{,}75}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2{,}273370}{5{,}76} \approx 0{,}394682$$

Quarta diferença dividida

Fórmula

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}394682 - (-0{,}431213)}{9{,}51 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}825895}{7{,}95}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \approx 0{,}103886$$

Tabela de diferenças divididas

i	x_i	$f[x_i]$	1ª dif.	2ª dif.	3ª dif.	4ª dif.
0	$1{,}56$	$1{,}56$	$-0{,}447489$	$0{,}915267$	$-0{,}431213$	$0{,}103886$
1	$3{,}75$	$0{,}58$	$3{,}607143$	$-1{,}568522$	$0{,}394682$	
2	$5{,}99$	$8{,}66$	$-1{,}992481$	$0{,}704848$		
3	$7{,}32$	$6{,}01$	$0{,}488584$			
4	$9{,}51$	$7{,}08$				

Coeficientes de Newton

Os coeficientes aparecem na primeira linha da tabela.

Coeficientes de Newton

A partir da primeira linha da tabela:

$$a_0 = f[x_0] = 1{,}56$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = -0{,}447489$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = 0{,}915267$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0{,}431213$$

$$a_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0{,}103886$$

Montando o polinômio de Newton

A forma é:

$$P_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$+a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Substituindo:

$$P_4(x) = 1{,}56 - 0{,}447489(x - 1{,}56)$$

$$+0{,}915267(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)$$

$$-0{,}431213(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)$$

$$+0{,}103886(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)$$

Como usar o polinômio de Newton?

Para calcular, por exemplo, em $x = 4{,}20$:

$$P_4(4{,}20) = 1{,}56 - 0{,}447489(4{,}20 - 1{,}56)$$

$$+0{,}915267(4{,}20 - 1{,}56)(4{,}20 - 3{,}75)$$

$$-0{,}431213(4{,}20 - 1{,}56)(4{,}20 - 3{,}75)(4{,}20 - 5{,}99)$$

$$+0{,}103886(4{,}20 - 1{,}56)(4{,}20 - 3{,}75)(4{,}20 - 5{,}99)(4{,}20 - 7{,}32)$$

Resultado esperado

O valor será o mesmo obtido pelo polinômio de Lagrange, pois os dois representam o mesmo interpolador.

Newton e Lagrange: comparação

Conclusão prática
Newton e Lagrange produzem o mesmo polinômio interpolador.

x	Lagrange	Newton
1,560	1,560	1,560
2,655	−3,690	−3,690
3,750	0,580	0,580
5,094	7,145	7,145
5,990	8,660	8,660
7,320	6,010	6,010
8,415	3,143	3,143
9,510	7,080	7,080

Diferença
A diferença está na construção: Lagrange usa bases $L_i(x)$; Newton usa diferenças divididas.

Splines: ideia principal

Mudança de estratégia

Lagrange e Newton usam um único polinômio global para todos os pontos. Splines usam polinômios por partes.

No nosso exemplo

Há quatro intervalos:

$$[1{,}56, 3{,}75], \quad [3{,}75, 5{,}99], \quad [5{,}99, 7{,}32], \quad [7{,}32, 9{,}51].$$

Ideia didática

Cada intervalo terá sua própria função interpoladora.

Spline Linear

Definição

A Spline Linear liga pontos consecutivos por segmentos de reta.

Fórmula no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

Ligação direta com a aula anterior

A Spline Linear é exatamente o método usado na aula anterior para inserir os pontos ao longo dos segmentos.

Spline linear no primeiro intervalo

Vamos calcular o ponto intermediário entre P_1 e P_2.

$$P_1 = (1{,}56,\ 1{,}56) \qquad P_2 = (3{,}75,\ 0{,}58)$$

O intervalo é:

$$[1{,}56,\ 3{,}75]$$

A Spline Linear nesse intervalo é:

$$S_0(x) = 1{,}56 + \frac{0{,}58 - 1{,}56}{3{,}75 - 1{,}56}(x - 1{,}56)$$

$$S_0(x) = 1{,}56 + \frac{-0{,}98}{2{,}19}(x - 1{,}56)$$

$$S_0(x) = 1{,}56 - 0{,}447489(x - 1{,}56)$$

Calculando $S_0(2{,}655)$

Queremos calcular o valor da Spline Linear no ponto:

$$x = 2{,}655$$

Usando:

$$S_0(x) = 1{,}56 - 0{,}447489(x - 1{,}56)$$

temos:

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 0{,}447489(2{,}655 - 1{,}56)$$

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 0{,}447489(1{,}095)$$

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 0{,}490$$

$$\boxed{S_0(2{,}655) \approx 1{,}070}$$

Spline linear no segundo intervalo

Agora vamos calcular pontos entre P_2 e P_3.

$$P_2 = (3{,}75,\ 0{,}58) \qquad P_3 = (5{,}99,\ 8{,}66)$$

O intervalo é:

$$[3{,}75,\ 5{,}99]$$

A Spline Linear nesse intervalo é:

$$S_1(x) = 0{,}58 + \frac{8{,}66 - 0{,}58}{5{,}99 - 3{,}75}(x - 3{,}75)$$

$$S_1(x) = 0{,}58 + \frac{8{,}08}{2{,}24}(x - 3{,}75)$$

$$S_1(x) = 0{,}58 + 3{,}607143(x - 3{,}75)$$

Calculando um ponto no segundo intervalo

Vamos calcular o valor para: $x = 4{,}198$.
Usando: $S_1(x) = 0{,}58 + 3{,}607143(x - 3{,}75)$
temos:

$$S_1(4{,}198) = 0{,}58 + 3{,}607143(4{,}198 - 3{,}75)$$

$$S_1(4{,}198) = 0{,}58 + 3{,}607143(0{,}448)$$

$$S_1(4{,}198) = 0{,}58 + 1{,}616$$

$$\boxed{S_1(4{,}198) \approx 2{,}196}$$

Observação
Os demais pontos do mesmo intervalo são calculados usando a mesma função $S_1(x)$.

Novos pontos usando Spline Linear

x	$S_{linear}(x)$
1,560	1,560
2,655	1,070
3,750	0,580
4,198	2,196
4,646	3,812
5,094	5,428
5,542	7,044
5,990	8,660
6,655	7,335
7,320	6,010
8,415	6,545
9,510	7,080

Observação

Esses são os pontos obtidos pela interpolação linear da aula anterior.

Spline Cúbica Natural: ideia principal

Mudança em relação à Spline Linear

Na Spline Linear, cada intervalo é representado por uma reta.
Na Spline Cúbica, cada intervalo é representado por um polinômio de grau 3.

Forma geral em cada intervalo

No intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, escrevemos:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Ideia importante

A Spline Cúbica tenta construir uma curva mais suave, evitando mudanças bruscas de direção entre um intervalo e outro.

O que a Spline Cúbica precisa respeitar?

Condição 1: passar pelos pontos

Cada trecho da spline deve passar pelos pontos conhecidos:

$$S_i(x_i) = y_i \qquad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Condição 2: suavidade da curva

Nos pontos de ligação, queremos que a curva encaixe suavemente:

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$

e

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}).$$

Condição natural

Na Spline Cúbica Natural, impomos:

$$S''(x_0) = 0 \qquad S''(x_n) = 0.$$

Por que os coeficientes não são imediatos?

Na Spline Linear

O coeficiente angular entre dois pontos é calculado diretamente:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Na Spline Cúbica

O coeficiente de cada trecho depende também da suavidade com os trechos vizinhos.

Por isso, os coeficientes são obtidos resolvendo um sistema linear.

Mensagem importante

Na Spline Cúbica, o coeficiente de $(x - x_i)$ não é apenas a inclinação da reta entre dois pontos.

Ele é ajustado para que a curva fique suave.

Notação usada na Spline Cúbica

Tamanho de cada intervalo

Definimos:

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Segundas derivadas

Definimos:

$$M_i = S''(x_i).$$

Esses valores indicam a curvatura da spline nos pontos conhecidos.

Spline Cúbica Natural

Como a spline é natural:

$$M_0 = 0 \qquad M_4 = 0.$$

Pontos usados na Spline Cúbica

i	x_i	y_i
0	1,56	1,56
1	3,75	0,58
2	5,99	8,66
3	7,32	6,01
4	9,51	7,08

Intervalos

Temos quatro intervalos:

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4].$$

Calculando os tamanhos dos intervalos

Usando $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$h_0 = 3{,}75 - 1{,}56 = 2{,}19$$

$$h_1 = 5{,}99 - 3{,}75 = 2{,}24$$

$$h_2 = 7{,}32 - 5{,}99 = 1{,}33$$

$$h_3 = 9{,}51 - 7{,}32 = 2{,}19$$

Interpretação

Cada h_i representa o comprimento do intervalo no eixo x.

Sistema para encontrar as curvaturas

Para encontrar os valores de M_i, usamos o sistema:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right].$$

Esse sistema é montado apenas para os pontos internos:

$$i = 1, 2, 3.$$

Como a spline é natural:

$$M_0 = 0 \qquad M_4 = 0.$$

Ideia

Os valores M_i são as segundas derivadas da spline nos pontos conhecidos. Eles controlam a curvatura da curva.

Sistema numérico da Spline Cúbica

Substituindo os valores do problema, obtemos:

$$8{,}86M_1 + 2{,}24M_2 = 24{,}327792$$

$$2{,}24M_1 + 7{,}14M_2 + 1{,}33M_3 = -33{,}597745$$

$$1{,}33M_2 + 7{,}04M_3 = 14{,}886390$$

com:

$$M_0 = 0 \qquad M_4 = 0.$$

Solução do sistema

$M_1 \approx 4{,}447723$, $M_2 \approx -6{,}731712$,$M_3 \approx 3{,}386303$

Curvaturas obtidas

i	x_i	$M_i = S''(x_i)$
0	1,56	0
1	3,75	4,447723
2	5,99	−6,731712
3	7,32	3,386303
4	9,51	0

Leitura da tabela

Os extremos têm curvatura zero porque estamos usando a Spline Cúbica Natural.

Como montar cada polinômio da spline?

No intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, usamos: $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
Os coeficientes são:

$$a_i = y_i$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1})$$

$$c_i = \frac{M_i}{2}$$

$$d_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$$

Ideia

Agora os coeficientes deixam de aparecer “do nada”: eles são calculados usando h_i, y_i e as curvaturas M_i.

De onde vem o coeficiente $-2{,}070907$?

No primeiro intervalo:

$$x_0 = 1{,}56, \qquad x_1 = 3{,}75, \qquad h_0 = 2{,}19.$$

Também temos:

$$y_0 = 1{,}56, \qquad y_1 = 0{,}58,$$

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = 4{,}447723.$$

O coeficiente b_0 é:

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1)$$

$$b_0 = \frac{0{,}58 - 1{,}56}{2{,}19} - \frac{2{,}19}{6}(2 \cdot 0 + 4{,}447723)$$

$$b_0 = -0{,}447489 - 1{,}623419$$

Montando o primeiro trecho da Spline Cúbica

No primeiro intervalo: $[1{,}56,\ 3{,}75]$ temos:

$$a_0 = y_0 = 1{,}56$$

$$b_0 \approx -2{,}070907$$

$$c_0 = \frac{M_0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$d_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{4{,}447723 - 0}{6 \cdot 2{,}19} \approx 0{,}338487$$

Portanto:

$$S_0(x) = 1{,}56 - 2{,}070907(x - 1{,}56) + 0{,}338487(x - 1{,}56)^3$$

$$1{,}56 \leq x \leq 3{,}75.$$

Trechos da Spline Cúbica Natural I

Primeiro intervalo

$$S_0(x) = 1{,}56 - 2{,}070907(x - 1{,}56) + 0{,}338487(x - 1{,}56)^3$$

$$1{,}56 \leq x \leq 3{,}75$$

Segundo intervalo

$$S_1(x) = 0{,}58 + 2{,}799349(x - 3{,}75)$$

$$+2{,}223861(x - 3{,}75)^2 - 0{,}831803(x - 3{,}75)^3$$

$$3{,}75 \leq x \leq 5{,}99$$

Trechos da Spline Cúbica Natural II

Terceiro intervalo

$$S_2(x) = 8{,}66 + 0{,}241281(x - 5{,}99)$$
$$-3{,}365856(x - 5{,}99)^2 + 1{,}267922(x - 5{,}99)^3$$
$$5{,}99 \leq x \leq 7{,}32$$

Quarto intervalo

$$S_3(x) = 6{,}01 - 1{,}983417(x - 7{,}32)$$
$$+1{,}693151(x - 7{,}32)^2 - 0{,}257710(x - 7{,}32)^3$$
$$7{,}32 \leq x \leq 9{,}51$$

Calculando um ponto com a Spline Cúbica

Vamos calcular o valor da spline em:

$$x = 2{,}655.$$

Esse valor está no intervalo:

$$1{,}56 \leq x \leq 3{,}75.$$

Portanto, usamos:

$$S_0(x) = 1{,}56 - 2{,}070907(x - 1{,}56) + 0{,}338487(x - 1{,}56)^3.$$

Substituindo:

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 2{,}070907(2{,}655 - 1{,}56)$$

$$+0{,}338487(2{,}655 - 1{,}56)^3$$

$$S_0(2{,}655) \approx -0{,}263.$$

Novos pontos usando Spline Cúbica Natural

Valores calculados

x	$S_{\text{cúbica}}(x)$
1,560	1,560
2,655	−0,263
3,750	0,580
4,198	2,206
4,646	4,275
5,094	6,340

Continuação

x	$S_{\text{cúbica}}(x)$
5,542	7,951
5,990	8,660
6,655	7,705
7,320	6,010
8,415	5,530
9,510	7,080

O que a Spline Cúbica mostra?

1. Ela passa pelos pontos originais

Assim como Lagrange, Newton e Spline Linear, a Spline Cúbica passa pelos pontos fornecidos inicialmente.

2. Ela é calculada por partes

Cada intervalo tem seu próprio polinômio cúbico:

$$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x).$$

3. Ela é mais suave que a Spline Linear

A curva não muda bruscamente de direção nos pontos de ligação.

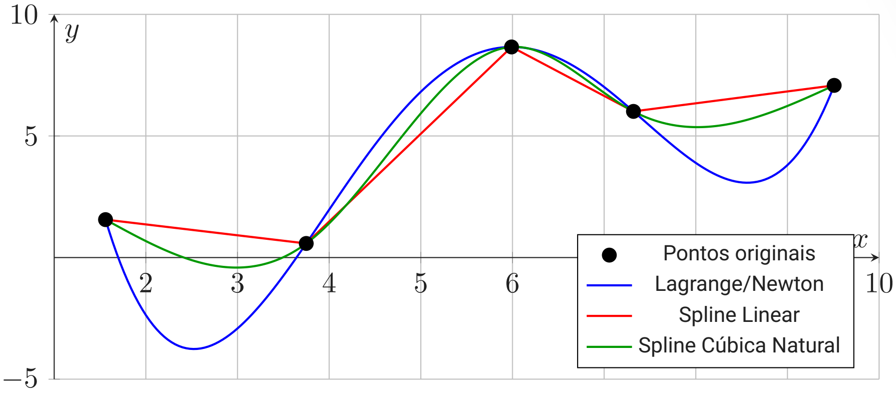
Mensagem final

A Spline Cúbica Natural usa curvaturas para ajustar os coeficientes. Por isso, seus valores intermediários podem ser diferentes dos valores da interpolação linear.

Comparação final dos métodos

x	Lagrange	Newton	Spline Linear	Spline Cúbica Natural
1,560	1,560	1,560	1,560	1,560
2,655	−3,690	−3,690	1,070	−0,263
3,750	0,580	0,580	0,580	0,580
4,198	3,061	3,061	2,196	2,206
4,646	5,345	5,345	3,812	4,275
5,094	7,145	7,145	5,428	6,340
5,542	8,278	8,278	7,044	7,951
5,990	8,660	8,660	8,660	8,660
6,655	7,903	7,903	7,335	7,705
7,320	6,010	6,010	6,010	6,010
8,415	3,143	3,143	6,545	5,530
9,510	7,080	7,080	7,080	7,080

Comparação Gráfica



O que devem perceber?

1. Nos pontos originais, todos coincidem

Todos os interpoladores passam pelos pontos fornecidos inicialmente.

2. Nos pontos intermediários, os valores podem ser diferentes

Isso acontece porque cada método constrói uma curva diferente entre os pontos.

3. Lagrange e Newton coincidem entre si

Eles representam o mesmo polinômio global, apenas escrito de maneiras diferentes.

4. Polinômios globais podem oscilar

O valor negativo obtido por Lagrange/Newton perto de $x = 2{,}655$ é um bom exemplo para discutir limitações da interpolação polinomial global.

Síntese Final

Lagrange
Fórmula direta para construir o polinômio interpolador global.

Newton
Mesmo polinômio de Lagrange, mas organizado por diferenças divididas.

Splines
Interpolação por partes, mais ligada à ideia geométrica da aula anterior.

Mensagem Final
A escolha do interpolador afeta diretamente os pontos intermediários gerados. Por isso, é importante entender o comportamento de cada método, não apenas aplicar a fórmula.

Exercício

Atividade

Repita o processo com outro conjunto de pontos:

$$Q_1 = (1, 2), \quad Q_2 = (4, 1), \quad Q_3 = (6, 7), \quad Q_4 = (9, 4).$$

1. Calcule as distâncias entre pontos consecutivos.
2. Subdivida os segmentos cuja distância seja maior que 2.
3. Determine os novos valores de x.
4. Calcule os valores de y usando Lagrange, Newton e Spline Linear.
5. Compare os resultados.