Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR

Encontro 24: Equações Diferenciais Ordinárias

Roteiro da aula

Ideia
Vamos partir de um problema prático e, aos poucos, construir a matemática necessária.

1. Problema motivador: uma caixa d'água com entrada e saída.
2. Revisão rápida: derivada como taxa de variação.
3. O que é uma EDO e o que é um PVI.
4. Construção da EDO da caixa d'água.
5. Aplicação do método de Euler.
6. Interpretação dos resultados como decisão de engenharia.

Objetivos da aula

Ao final da aula, o aluno deverá conseguir:

- entender EDO como uma equação que descreve uma taxa de variação;
- reconhecer a forma $y' = f(t, y)$;
- entender o papel da condição inicial;
- construir um modelo simples para uma caixa d'água;
- aplicar o método de Euler passo a passo;
- interpretar o resultado numérico em um contexto de engenharia.

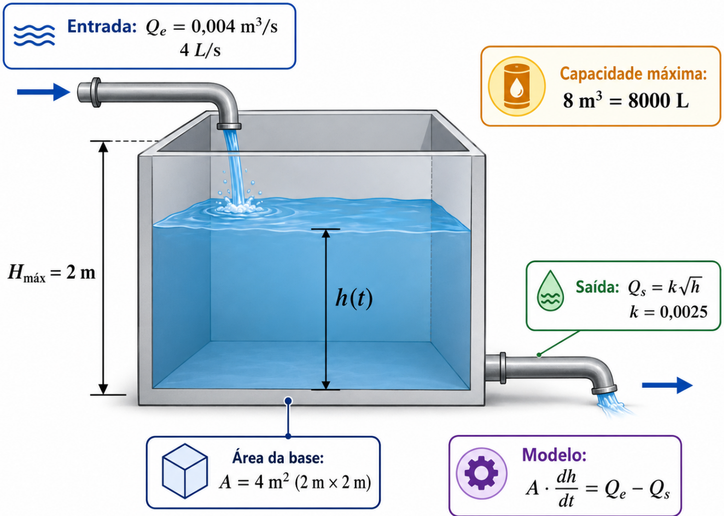
Problema motivador: caixa d'água

Situação

Uma caixa recebe água por uma tubulação de entrada e perde água por uma saída inferior.

Pergunta principal

Se a água entra e sai ao mesmo tempo, como prever o nível da caixa ao longo do tempo?



Antes da fórmula: o que queremos prever?

Não queremos apenas o volume máximo

O volume máximo informa a capacidade da caixa. Mas o problema dinâmico pergunta como o nível muda ao longo do tempo.

Queremos responder:

1. Como o nível $h(t)$ varia enquanto a água entra e sai?
2. A caixa transborda?
3. Em quanto tempo ela atinge a altura máxima?
4. Como um método numérico ajuda quando a solução não é obtida diretamente?

Comentário

Essa é a diferença entre um cálculo estático e um modelo dinâmico.

Revisão: derivada como taxa de variação

A derivada representa uma taxa de variação.

Se $h(t)$ é o nível da água no tempo, então:

$$\frac{dh}{dt}$$

indica a velocidade com que o nível está subindo ou descendo.

Se $\frac{dh}{dt} > 0$
O nível sobe.

Se $\frac{dh}{dt} = 0$
O nível fica constante.

Se $\frac{dh}{dt} < 0$
O nível desce.

O que é uma EDO?

Definição

Uma Equação Diferencial Ordinária é uma equação que envolve uma função desconhecida e suas derivadas em relação a uma única variável independente.

Forma comum em Cálculo Numérico:

$$\frac{dy}{dt} = f(t; y)$$

- t: variável independente, geralmente tempo;
- $y(t)$: função desconhecida;
- $f(t; y)$: regra que define a taxa de variação.

No nosso exemplo

A função desconhecida será $h(t)$, o nível da água na caixa.

O que é um Problema de Valor Inicial?

Um PVI tem duas partes:

$$\frac{dy}{dt} = f(t; y)$$

$$y(t_0) = y_0$$

A EDO diz como a variável muda.

A condição inicial diz onde o sistema começa.

Na caixa d'água

Se a caixa começa vazia, a condição inicial é:

$$h(0) = 0$$

Dados do problema

Considere uma caixa d'água retangular com base constante.

Geometria

Área da base: $A = 4\,\mathrm{m}^2$.

Altura máxima: $H_{max} = 2\,\mathrm{m}$.

Volume máximo:
$V_{max} = A \cdot H_{max}$.

Vazões

Entrada: $Q_e = 0{,}004\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$.

Saída: $Q_s = k\sqrt{h}$.

Constante da saída: $k = 0{,}0025$.

Condição inicial

A caixa começa vazia: $h(0) = 0$.

Volume máximo da caixa

A caixa tem área de base:

$$A = 4\,\mathrm{m}^2$$

e altura máxima:

$$H_{max} = 2\,\mathrm{m}$$

Logo:

$$V_{max} = A \quad H_{max} = 4 \quad 2 = 8\,\mathrm{m}^3$$

Como $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{L}$:

$$V_{max} = 8000\,\mathrm{L}$$

Interpretação
Estamos estudando uma caixa d’água de 8 mil litros.

Por que a saída depende de $\sqrt{h}$?

Ideia física simplificada

Quanto maior a altura da água, maior a pressão no fundo da caixa. Assim, a vazão de saída aumenta quando o nível h aumenta.

Usaremos o modelo simplificado:

$$Q_S = k\sqrt{h}$$

Q_S: vazão de saída;

h: altura da água;

k: constante associada a saída, tubulação ou orifício.

Comentário didático

Não precisamos aprofundar a hidráulica neste momento. O importante é notar que a saída não é constante: ela depende do nível da água.

Balanço de volume

A ideia central é simples:

$$\text{variação do volume} = \text{entrada} \quad \text{saída}$$

Em forma matemática:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e \quad Q_s$$

Como a caixa tem base constante:

$$V(t) = A \quad h(t)$$

Derivando:

$$\frac{dV}{dt} = A\frac{dh}{dt}$$

Ligacao com EDO

A derivada aparece porque queremos a taxa de variação do volume e do nível ao longo do tempo.

Construindo a EDO

Partimos do balanço:

$$\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_s$$

Como $V = Ah$:

$$A\frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s$$

Como $Q_s = k\sqrt{h}$:

$$A\frac{dh}{dt} = Q_e - k\sqrt{h}$$

Isolando a derivada:

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{Q_e - k\sqrt{h}}{A}}$$

EDO do problema

Essa equação descreve como a altura da água muda com o tempo.

Substituindo os valores

Dados:

$$A = 4; \qquad Q_e = 0;004; \qquad k = 0;0025$$

A EDO fica:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0;004 \quad 0;0025^{p}\,\overline{h}}{4}$$

Ou, simplificando:

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = 0;001 \quad 0;000625^{p}\,\overline{h}}$$

Com condição inicial:

$$\boxed{h(0) = 0}$$

Unidade importante

Como as vazões estão em $m^3{=}s$, o tempo deve ser usado em segundos.

Interpretação da EDO

A EDO é:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}004 - 0{,}0025\sqrt{h}}{4}$$

Entrada

$$0{,}004$$

Representa a água chegando na caixa.

Saída

$$0{,}0025\sqrt{h}$$

Representa a água saindo, dependendo do nível.

Leitura física

Se entrada > saída, o nível sobe. Se entrada = saída, o nível fica constante. Se entrada < saída, o nível desce.

Altura de equilíbrio

Ideia

A altura de equilíbrio ocorre quando o nível para de variar:

$$\frac{dh}{dt} = 0$$

Logo:

$$Q_e - k\sqrt{h} = 0$$

$$Q_e = k\sqrt{h}$$

$$\sqrt{h} = \frac{Q_e}{k}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$h = \left(\frac{Q_e}{k}\right)^2$$

Resultado

$$\boxed{h_{eq} = \left(\frac{Q_e}{k}\right)^2}$$

Comentário

Antes da simulação, já conseguimos prever para qual altura o sistema tenderia se não houvesse limite físico.

Calculando a altura de equilíbrio

Substituindo:

$$Q_e = 0;004; \qquad k = 0;0025$$

$$h_{eq} = {\frac{0;004}{0;0025}}^{2}$$

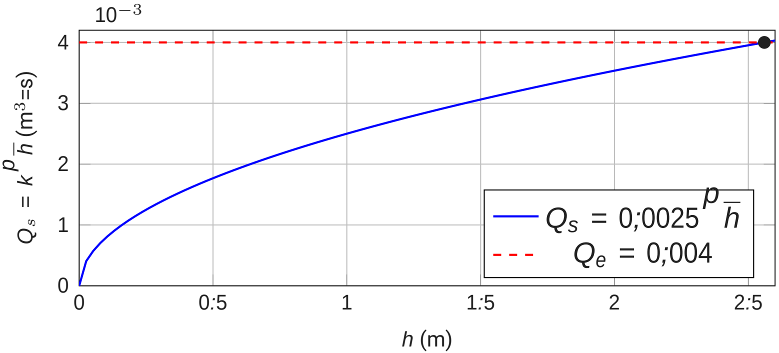
$$h_{eq} = (1;6)^2$$

$$\boxed{h_{eq} = 2;56\,\mathrm{m}}$$

Conclusao preliminar

A caixa tem altura máxima de 2 m, mas o equilíbrio natural seria 2;56 m. Portanto, sem controle, a caixa tende a transbordar.

Gráfico: vazão de saída em função do nível



Interpretação

O equilíbrio ocorre quando a curva da saída encontra a linha da entrada.

Agora entra o método numérico

Embora tenhamos calculado o equilíbrio, ainda queremos saber:

Em quanto tempo a caixa chega ao topo?

Método escolhido

Vamos usar o método de Euler, pois ele é o método mais simples para introduzir EDOs numericamente.

Escolha do passo

Usaremos passo de 10 minutos. Como a EDO está em segundos:

$$t = 10 \text{ min} = 600 \text{ s}$$

Método de Euler: ideia geral

Para uma EDO na forma:

$$y' = f(t; y)$$

Euler calcula:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n)$$

Interpretação simples

Próximo valor = valor atual + passo   inclinacao atual.

No exemplo da caixa

A variável não será *y*, mas sim *h*, o nível da água.

Substituição dos dados na EDO

A EDO geral do problema é:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_e - k\sqrt{h}}{A}$$

Os dados assumidos para o exemplo são:

$$Q_e = 0;004\,\mathrm{m}^3 = s; \qquad k = 0;0025; \qquad A = 4\,\mathrm{m}^2$$

Substituindo:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0;004 - 0;0025\sqrt{h}}{4}$$

Interpretação

O valor 0;004 representa a entrada de água, $0;0025\sqrt{h}$ representa a saída e 4 é a área da base.

Aplicando Euler à caixa d'água

Partimos da EDO já com os dados do problema:

$$\frac{dh}{dt} = f(t,h) = \frac{0{,}004 - 0{,}0025\sqrt{h}}{4}$$

Pela fórmula geral de Euler:

$$h_{n+1} = h_n + \Delta t \, f(t_n, h_n)$$

Substituindo a função $f(t,h)$:

$$\boxed{h_{n+1} = h_n + \Delta t \, \frac{0{,}004 - 0{,}0025\sqrt{h_n}}{4}}$$

Atenção

Aqui $\Delta t = 600$ segundos, e não 10, pois as vazões estão em m^3/s.

Primeiro passo pelo método de Euler

Dados iniciais:

$$t_0 = 0; \qquad h_0 = 0; \qquad t = 600$$

Calculamos a derivada no ponto inicial:

$$f(t_0; h_0) = \frac{0;004 \quad 0;0025\sqrt{0}}{4}$$

$$f(t_0; h_0) = \frac{0;004}{4} = 0;001$$

Aplicando Euler:

$$h_1 = 0 + 600 \quad 0;001$$

$$\boxed{h_1 = 0;6000\,\mathrm{m}}$$

Segundo passo pelo método de Euler

Agora:

$$t_1 = 600 \text{ s}; \qquad h_1 = 0;6000$$

A vazão de saída é:

$$Q_s = 0;0025\sqrt{0;6000} \quad 0;001936$$

A derivada fica:

$$f(t_1; h_1) = \frac{0;004 \quad 0;001936}{4} \quad 0;000516$$

Aplicando Euler:

$$h_2 = 0;6000 + 600 \quad 0;000516$$

$$\boxed{h_2 \quad 0;9095\,\text{m}}$$

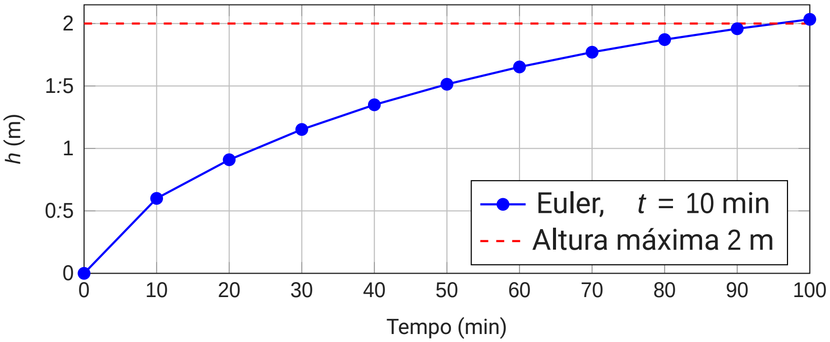
Tabela da simulação por Euler

n	Tempo	h_n (m)	Q_s (m^3=s)	h_{n+1} (m)
0	0 min	0,0000	0,000000	0,6000
1	10 min	0,6000	0,001936	0,9095
2	20 min	0,9095	0,002384	1,1519
3	30 min	1,1519	0,002683	1,3494
4	40 min	1,3494	0,002904	1,5138
5	50 min	1,5138	0,003076	1,6524
6	60 min	1,6524	0,003214	1,7704
7	70 min	1,7704	0,003326	1,8714
8	80 min	1,8714	0,003420	1,9584
9	90 min	1,9584	0,003499	2,0336

Conclusao da tabela

A caixa ultrapassa 2 m entre 90 e 100 minutos.

Gráfico: nível da água ao longo do tempo



Leitura do gráfico

A curva cruza a linha da altura máxima pouco depois de 90 minutos.

Estimativa do tempo de transbordamento

Pela tabela:

$$h(90\ \text{min}) \qquad 1{;}9584\ \text{m}$$

$$h(100\ \text{min}) \qquad 2{;}0336\ \text{m}$$

Portanto, o nível 2 m está entre esses dois tempos.

Estimativa por interpolacao linear

$$t \qquad 90 + 10\ \frac{2 \qquad 1{;}9584}{2{;}0336 \qquad 1{;}9584} \qquad 95{;}5\ \text{min}$$

Conclusao prática

Nesse cenário, a caixa de 8000 L começa a transbordar por volta de 1 hora e 36 minutos.

Código Python para reproduzir a simulação

```
import math
A = 4.0              # área da base da caixa, em m^2
Qe = 0.004           # vazão de entrada, em m^3/s
k = 0.0025           # constante da saída
Hmax = 2.0           # altura máxima da caixa, em m
dt = 600             # passo: 10 min = 600 s
h = 0.0              # nível inicial da água
t = 0.0              # tempo inicial, em segundos
for n in range(10):
    Qs = k * math.sqrt(h)
    dhdt = (Qe - Qs) / A
    h_prox = h + dt * dhdt
    print(n, t/60, h, Qs, h_prox)
    h = h_prox
    t = t + dt
```

Como interpretar o código?

Linha principal do método

$$h_{n+1} = h_n + \quad t \; \frac{Q_e \quad k\sqrt{h_n}}{A}$$

No código, isso aparece em duas etapas:

```
dhdt = (Qe - Qs) / A
```

```
h_prox = h + dt * dhdt
```

Comentário para a aula

O programa não está fazendo nada misterioso: ele apenas repete a fórmula de Euler varias vezes.

E se quisermos evitar o transbordamento?

Como o equilíbrio natural é:

$$h_{eq} = 2{,}56\,\mathrm{m}$$

mas a caixa tem:

$$H_{\max} = 2\,\mathrm{m}$$

ela transborda sem controle.

Possíveis decisoes de projeto

- reduzir a vazão de entrada;
- aumentar a capacidade da saída;
- aumentar a altura ou volume da caixa;
- instalar boia de controle;
- instalar extravasor de segurança.

Exemplo de redimensionamento

Se quisermos que a caixa não transborde sem controle automático, uma ideia é escolher uma altura maior que o equilíbrio.

$$H_{max} > 2{;}56\,\mathrm{m}$$

Por exemplo:

$$H_{max} = 3\,\mathrm{m}$$

O volume seria:

$$V = A \quad H_{max} = 4 \quad 3 = 12\,\mathrm{m}^3$$

$$\boxed{V = 12000\,\mathrm{L}}$$

Interpretação

Uma caixa de 12000 L teria folga para que o nível se estabilizasse antes do transbordamento.

Resumo do processo completo

1. Definimos a geometria da caixa.
2. Escrevemos o balanço de volume: entrada menos saída.
3. Relacionamos volume e altura: $V = Ah$.
4. Construímos a EDO:
$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q_e - k\sqrt{h}}{A}$$
5. Calculamos a altura de equilíbrio.
6. Aplicamos Euler para simular o nível no tempo.
7. Interpretamos o resultado como decisão de engenharia.

Fechamento da aula

Ideia central
A EDO permite transformar um problema físico em um modelo matemático de evolução.

Neste exemplo
A EDO mostrou como o nível da água muda com o tempo e permitiu estimar o instante de transbordamento.

Cálculo Numérico
O método numérico não substitui a interpretação física. Ele ajuda a quantificar o comportamento previsto pelo modelo.

Exercício: resfriamento de uma bebida

Uma bebida está inicialmente a 80 C em uma sala a 25 C. O resfriamento é modelado pela EDO:

$$\frac{dT}{dt} = \quad 0{;}08(T \quad 25)$$

com:

$$T(0) = 80$$

Use o método de Euler com $h = 5$ minutos para estimar $T(20)$.

Exercício: resfriamento de uma bebida

Situação

Uma bebida está inicialmente a:

$$T(0) = 80 \;\; C$$

Ela é colocada em uma sala com temperatura ambiente:

$$T_a = 25 \;\; C$$

Modelo

O resfriamento é modelado por:

$$\frac{dT}{dt} = \quad 0;08(T \quad 25)$$

Use Euler com:

$$h = 5 \text{ min}$$

Objetivo

Estimar:

$$T(20)$$

Interpretando a EDO

A EDO do problema é:

$$\frac{dT}{dt} = \quad 0;08(T \quad 25)$$

$T(t)$: temperatura da bebida.

25: temperatura ambiente.

$T \quad 25$: diferença para o ambiente.

Sinal negativo

Como a bebida está esfriando:

$$\frac{dT}{dt} < 0$$

Por isso aparece:

$$0;08(T \quad 25)$$

Ideia física

Quanto maior a diferença $T \quad 25$, mais rápido ocorre o resfriamento.

Método de Euler aplicado

A fórmula geral de Euler é:

$$T_{n+1} = T_n + hf(t_n; T_n)$$

No problema:

$$f(t; T) = \quad 0{;}08(T \quad 25)$$

Logo:

$$T_{n+1} = T_n + h[\quad 0{;}08(T_n \quad 25)]$$

Como:

$$h = 5$$

temos:

$$T_{n+1} = T_n + 5[\quad 0{;}08(T_n \quad 25)]$$

$$\boxed{T_{n+1} = T_n \quad 0{;}4(T_n \quad 25)}$$

Atenção

A constante 0;08 está em min ^{1}.

Passos 1 e 2

Passo 1: de 0 para 5 min

$$T_0 = 80$$

$$f(t_0; T_0) = \quad 0;08(80 \quad 25)$$

$$f(t_0; T_0) = \quad 4;4$$

$$T_1 = 80 + 5(\quad 4;4)$$

$$\boxed{T_1 = 58 \ C}$$

Passo 2: de 5 para 10 min

$$T_1 = 58$$

$$f(t_1; T_1) = \quad 0;08(58 \quad 25)$$

$$f(t_1; T_1) = \quad 2;64$$

$$T_2 = 58 + 5(\quad 2;64)$$

$$\boxed{T_2 = 44;8 \ C}$$

Passos 3 e 4

Passo 3: de 10 para 15 min

$$T_2 = 44;8$$

$$f(t_2; T_2) = \quad 0;08(44;8 \quad 25)$$

$$f(t_2; T_2) = \quad 1;584$$

$$T_3 = 44;8 + 5(\quad 1;584)$$

$$\boxed{T_3 = 36;88 \ C}$$

Passo 4: de 15 para 20 min

$$T_3 = 36;88$$

$$f(t_3; T_3) = \quad 0;08(36;88 \quad 25)$$

$$f(t_3; T_3) = \quad 0;9504$$

$$T_4 = 36;88 + 5(\quad 0;9504)$$

$$\boxed{T_4 = 32;128 \ C}$$

Tabela final da aproximação

n	t_n (min)	T_n ($^\circ C$)	$f(t_n; T_n)$	T_{n+1} ($^\circ C$)
0	0	80,000	-4,4000	58,000
1	5	58,000	-2,6400	44,800
2	10	44,800	-1,5840	36,880
3	15	36,880	-0,9504	32,128

Resultado

$$\boxed{T(20) \quad 32;13^\circ C}$$

Conclusão do exercício

Resultado numérico

Pelo método de Euler, com passo de 5 minutos:

$$\boxed{T(20) \quad 32;13 \;\; C}$$

Interpretação

A bebida esfria rapidamente no início, pois a diferença $T \quad 25$ é grande.

Por que o resfriamento diminui?

Conforme T se aproxima de 25 C, a diferença:

$$T \quad 25$$

fica menor.

Assim, a taxa:

$$\frac{dT}{dt} = \quad 0;08(T \quad 25)$$

também diminui em módulo.