Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

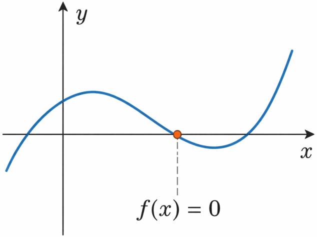
UFPR

Encontro 11: Zero Funções

Aplicações

O objetivo desta aula será mostrar outros métodos de zero de funções

1. Método do Ponto Fixo;
2. Método de Newton-Raphson;
3. Método da Secante.



Método do Ponto Fixo

Método do Ponto Fixo (MPF)

Queremos resolver:

$$f(x) = 0$$

Mas, ao invés de resolver diretamente, reescrevemos como:

$$x = g(x)$$

Ideia central:

- Transformar o problema em um processo iterativo
- A solução será um valor que não muda ao aplicar $g(x)$

Método do Ponto Fixo

A sequência iterativa é definida por:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Interpretação:

- Começamos com uma estimativa inicial x_0
- Calculamos $x_1 = g(x_0)$
- Depois $x_2 = g(x_1)$
- E repetimos o processo

Objetivo:

- Encontrar um valor tal que:

$$x = g(x)$$

Quem é $g(x)$?

A função $g(x)$ é uma **reorganização da equação original**.

Considere:

$$x^3 - 9x + 3 = 0$$

Podemos escrever como:

$$x = \frac{x^3 + 3}{9}$$

Logo:

$$g(x) = \frac{x^3 + 3}{9}$$

Importante:

- A escolha de $g(x)$ não é única
- Diferentes escolhas levam a comportamentos diferentes

Diferentes formas de $g(x)$

Considere:

$$x^3 - 9x + 3 = 0$$

Podemos reescrever como:

$$x = \frac{x^3 + 3}{9}$$

$$x = \frac{3}{9 - x^2}$$

$$x = \sqrt[3]{9x - 3}$$

Conclusão:

- A mesma equação pode gerar diferentes funções $g(x)$
- Nem todas são boas escolhas

Intuição do Método

Queremos encontrar um valor tal que:

$$x = g(x)$$

Isso significa:

- Aplicar $g(x)$ não altera mais o valor de x
- Esse ponto é chamado de **ponto fixo**

Processo:

- Começamos com um chute inicial
- Aplicamos $g(x)$ repetidamente
- Esperamos que os valores se estabilizem

Exemplo do Método do Ponto Fixo

Considere:

$$g(x) = \frac{x^3 + 3}{9}$$

Escolha inicial:

$$x_0 = 0.5$$

Iterações:

- $x_1 = 0.3472$
- $x_2 = 0.3370$
- $x_3 = 0.3358$

Resultado: Os valores estão convergindo para a raiz.

Interpretação Gráfica

O método busca a interseção entre:

$$y = g(x) \quad \text{e} \quad y = x$$

Por quê?

$$x = g(x)$$

- O ponto onde as duas curvas se cruzam é a solução
- Esse ponto é o ponto fixo

Algoritmo do Método do Ponto Fixo

1. Escolha uma função $g(x)$
2. Defina uma estimativa inicial x_0
3. Defina a tolerância ε
4. **Enquanto** $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$, faça:
   - $x_{n+1} = g(x_n)$
5. Ao final, x_n é a raiz aproximada

Qual $g(x)$ escolher?

Nem toda escolha funciona bem.

Problema:

- Algumas funções convergem
- Outras divergem
- Algumas oscilam

Conclusão:

- A escolha de $g(x)$ é fundamental

Intuição sobre convergência

Para o método funcionar bem, queremos:

$$|g'(x)| < 1$$

Interpretação:

- A função deve "puxar" os valores para a solução
- Se crescer muito rápido $\to$ diverge
- Se for suave $\to$ converge

Comparação: escolhas de $g(x)$

Considere:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \quad \text{com } x_0 = 0.5$$

Boa escolha

$$g(x) = \frac{x^3 + 3}{9}$$

n	x_n
0	0.500
1	0.347
2	0.337
3	0.336

Converge

Má escolha

$$g(x) = \sqrt[3]{9x - 3}$$

n	x_n
0	0.500
1	1.145
2	1.930
3	2.488

Diverge

Exemplo: Método do Ponto Fixo

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{x^3 + 3}{9}$$

Chute inicial: $x_0 = 0.5$

Iterações

$$x_1 = 0.347$$

$$x_2 = 0.337$$

$$x_3 = 0.336$$

Critério

$$|x_{n+1} - x_n| < 0.01$$

Resultado

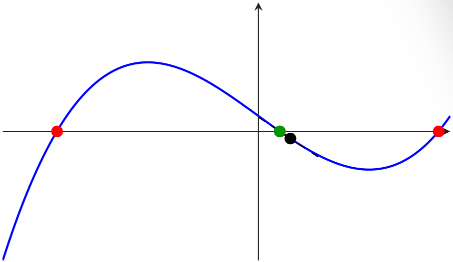
$$x \approx 0.336$$

Convergiu

Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$



Ideia:

- Escolher x_0
- Traçar a tangente
- Encontrar x_1

$$x_0 = 0.5$$

$$x_1 \approx 0.337$$

Fórmula do Método de Newton-Raphson

A sequência iterativa é dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Interpretação:

- x_n é a aproximação atual
- $f(x_n)$ mede o erro no ponto atual
- $f'(x_n)$ indica a inclinação da curva nesse ponto

Objetivo:

- Corrigir o valor de x_n para chegar mais perto da raiz

Intuição geométrica

No método de Newton-Raphson:

- Escolhemos um ponto inicial x_0
- Traçamos a reta tangente à curva em x_0
- Onde essa reta corta o eixo x, obtemos x_1
- Repetimos o processo até convergir

Conclusão:

- O método usa a geometria da curva para acelerar a aproximação da raiz

Derivada da função

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Regras:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(kx) = k$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Aplicando:

$$x^3 \to 3x^2$$

$$-9x \to -9$$

$$3 \to 0$$

Resultado:

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

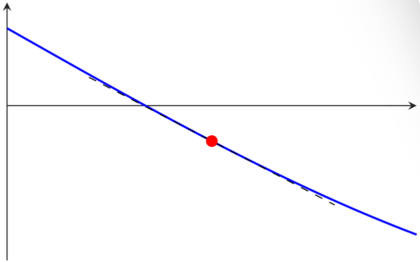
O que representa a derivada?

Derivada:

$$f'(x)$$

Significado:

- Inclinação da curva
- Direção naquele ponto



Conclusão:

$f'(x) \Rightarrow$ inclinação da tangente

Aplicando à função da aula

Considere:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Sua derivada é:

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

Substituindo na fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 9x_n + 3}{3x_n^2 - 9}$$

Importante:

- No método de Newton, precisamos conhecer $f(x)$ e $f'(x)$

Algoritmo do Método de Newton-Raphson

1. Escolha uma estimativa inicial x_0
2. Calcule $f(x)$ e $f'(x)$
3. Defina a tolerância ε
4. **Enquanto** $|x_{n+1} - x_n| > \varepsilon$, faça:
   - $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
5. Ao final, x_n é a raiz aproximada

Vantagens e cuidados

Vantagens

- Geralmente converge rápido
- Usa poucas iterações
- É muito eficiente quando o chute inicial é bom

Cuidados

- É preciso calcular a derivada
- Pode falhar com chute ruim
- Não pode usar ponto com $f'(x) = 0$

Escolha do valor inicial

No método de Newton-Raphson, a escolha de x_0 influencia o comportamento do método.

Se o chute inicial for bom:

- o método converge rapidamente

Se o chute inicial for ruim:

- o método pode demorar
- pode convergir para outra raiz
- ou até divergir

Exemplo do Método de Newton-Raphson

Considere:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \quad \text{e} \quad f'(x) = 3x^2 - 9$$

Escolha inicial:

$$x_0 = 0.5$$

Iterações:

- $x_1 = 0.3372$
- $x_2 = 0.3358$
- $x_3 = 0.3358$

Resultado: O método converge rapidamente para a raiz.

Comparação com o MPF

- No MPF, reescrevemos $f(x) = 0$ como $x = g(x)$
- No Newton, usamos diretamente $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$

Resumo:

- MPF: mais simples de entender, mas depende muito de $g(x)$
- Newton-Raphson: mais forte e mais rápido, mas exige derivada

Exemplo: Método de Newton-Raphson

$$f(x) = x^3 - 9x + 3 \quad \text{e} \quad f'(x) = 3x^2 - 9$$

Chute inicial: $x_0 = 0.5$

Iterações

$$x_1 = 0.337$$

$$x_2 = 0.336$$

$$x_3 = 0.336$$

Critério

$$|x_{n+1} - x_n| < 0.01$$

Resultado

$$x \approx 0.336$$

Convergiu

Método da Secante

Método da Secante

$$f(x) = 0$$

Ideia:

- Usar dois pontos da curva
- Traçar uma reta entre eles
- Encontrar onde essa reta cruza o eixo x

Resultado:

$$x_{n+1} \rightarrow \text{nova aproximação da raiz}$$

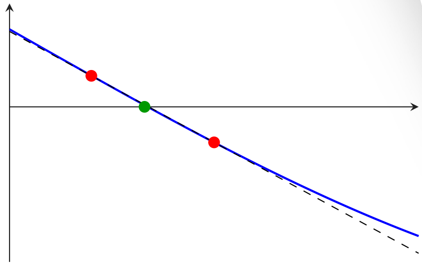
Intuição geométrica

Processo:

- Escolher x_0 e x_1
- Traçar a reta entre eles
- Obter x_2

Ideia:

- Aproximar a curva por uma reta



Fórmula da Secante

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Interpretação:

- Usa dois pontos anteriores
- Não precisa de derivada

Ideia:

- Aproxima a derivada usando diferença

Algoritmo da Secante

1. Escolha x_0 e x_1
2. Defina ε
3. **Enquanto** $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon$:
    - Calcular x_{n+1}
4. Retornar x_n

Vantagens e cuidados

Vantagens

- Não precisa derivada
- Mais rápido que bisseção

Cuidados

- Pode divergir
- Sensível aos valores iniciais

Exemplo: Método da Secante

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Valores iniciais: $x_0 = 0.2,\ x_1 = 0.5$

Iterações

$$x_2 \approx 0.34$$

$$x_3 \approx 0.336$$

Critério

$$|x_n - x_{n-1}| < 0.01$$

Resultado

$$x \approx 0.336$$

Convergiu

Comparação dos métodos

Método	Ideia	Derivada	Velocidade	Estabilidade
Bisseção	Divide o intervalo	Não	Lenta	Alta
Ponto Fixo	$x = g(x)$	Não	Média	Depende de $g(x)$
Newton	Tangente	Sim	Rápida	Depende de x_0
Secante	Reta entre 2 pontos	Não	Rápida	Média

Resumo:

- Bisseção: seguro, porém lento
- Newton: mais rápido, mas exige derivada
- Secante: aproxima Newton sem derivada
- MPF: depende da escolha de $g(x)$

Importante!

Este material é exclusivo de uso do autor. Proibido copiar ou replicar.

rogeriovargas@ufpr.br

rogerio.in

UFPR

Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in