Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR

Encontro 27: Equações Diferenciais Ordinárias

Métodos numéricos para EDOs

Problema geral

Muitas situações reais podem ser modeladas por uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dt} = f(t; y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

- t: variável independente, geralmente o tempo;
- $y(t)$: grandeza que queremos calcular;
- $f(t; y)$: taxa de variação de y;
- $y(t_0) = y_0$: condição inicial.

Ideia central

Quando não resolvemos a EDO de forma analítica, calculamos aproximações numéricas:

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \ldots$$

Discretização do intervalo

Divisão do tempo

Escolhemos um passo h e calculamos os valores em pontos igualmente espaçados:

$$t_0, \quad t_1 = t_0 + h, \quad t_2 = t_0 + 2h, \quad \ldots$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Objetivo

Conhecendo y_n, queremos estimar o próximo valor:

$$y_{n+1}.$$

Pergunta principal

Como avançar de y_n para y_{n+1} usando a EDO?

Relembrando o método de Euler

Fórmula de Euler

Para a EDO

$$\frac{dy}{dt} = f(t; y),$$

o método de Euler é:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n).$$

- Calcula a inclinação no ponto atual;
- Usa essa inclinação durante todo o intervalo;
- Avança em linha reta até o próximo ponto.

Interpretação

Euler pergunta:

"Qual é a inclinação agora?"

e usa essa inclinação para dar o próximo passo.

Limitação do método de Euler

O que Euler faz?

Euler usa apenas a inclinação no início do intervalo:

$$f(t_n; y_n).$$

- Simples de aplicar;
- Fácil de implementar;
- Bom para introdução;
- Pode acumular erro rapidamente.

Problema

Se a curva muda muito dentro do intervalo, usar apenas uma inclinação pode gerar uma aproximação ruim.

Ideia

Para melhorar o resultado, podemos olhar também para inclinações intermediárias.

Motivação para Runge-Kutta

Ideia geral

Os métodos de Runge-Kutta procuram melhorar a aproximação usando mais informações dentro de cada intervalo.

Diferença principal

Euler usa uma única inclinação.
Runge-Kutta usa várias inclinações e combina essas informações.

Frase didática

Euler pergunta:

“Qual é a inclinação no início?”

Runge-Kutta pergunta:

“Como a inclinação se comporta ao longo do intervalo?”

Família dos métodos Runge-Kutta

Runge-Kutta não é um único método

Existe uma família de métodos:

$$RK1, \quad RK2, \quad RK3, \quad RK4, \ldots$$

- $RK1$: usa uma inclinação;
- $RK2$: usa duas inclinações;
- $RK4$: usa quatro inclinações;
- quanto maior a ordem, maior tende a ser a precisão por passo.

Observação importante

O método de Euler pode ser visto como um Runge-Kutta de primeira ordem:

$$RK1 = \text{Euler}.$$

RK1 e Euler

Runge-Kutta de 1ª ordem

No RK1, calculamos apenas:

$$k_1 = f(t_n; y_n).$$

Depois:

$$y_{n+1} = y_n + hk_1.$$

Substituindo k_1:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n).$$

Conclusão

Essa é exatamente a fórmula do método de Euler.

$$RK1 = Euler$$

Runge-Kutta de 4ª ordem

Forma mais conhecida

Em muitas disciplinas de Cálculo Numérico, quando falamos em método de Runge-Kutta, normalmente estamos nos referindo ao método de quarta ordem:

$$RK4.$$

Ideia do RK4

Em vez de usar uma única inclinação, o RK4 calcula quatro inclinações:

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad k_4.$$

Resumo

Essas inclinações representam estimativas no início, no meio e no fim do intervalo.

As quatro inclinações do RK4

Para a EDO: $\frac{dy}{dt} = f(t; y)$, temos:

$$k_1 = f(t_n; y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_n + h,\ y_n + hk_3)$$

Atenção
Os valores k_1, k_2, k_3, k_4 são inclinações, não são os novos valores de y.

Atualização no RK4

Fórmula final

Depois de calcular as quatro taxas de variação, fazemos:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Média ponderada

O RK4 usa uma média ponderada das taxas de variação:

$$\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

Significado dos termos

- k_1: taxa de variação no início;
- k_2: taxa de variação no meio;
- k_3: outra taxa de variação no meio;
- k_4: taxa de variação no final.

Ideia

As taxas intermediárias recebem peso maior:

$$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$$

Interpretação dos pesos

Pesos usados

$$k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4$$

- k_1 tem peso 1;
- k_2 tem peso 2;
- k_3 tem peso 2;
- k_4 tem peso 1.

Por que o meio pesa mais?
As inclinações intermediárias costumam representar melhor o comportamento médio da curva dentro do intervalo.

Mensagem para os alunos
O RK4 não “chuta” apenas a partir do início. Ele tenta entender melhor o caminho dentro do intervalo.

Comparação: Euler x RK4

Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n; y_n)$$

- Uma inclinação;
- Cálculo simples;
- Menor custo computacional;
- Menor precisão.

RK4

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- Quatro inclinações;
- Cálculo mais trabalhoso;
- Maior custo por passo;
- Melhor precisão.

Resumo

O RK4 costuma produzir aproximações melhores que Euler usando o mesmo tamanho de passo h.

Exemplo 1: problema da caixa d’água

Situação

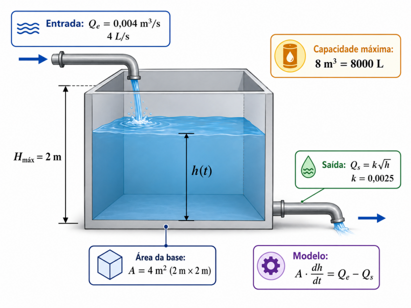
Queremos modelar a variação do volume de água em uma caixa ao longo do tempo.

- $V(t)$: volume de água no instante t;
- t: tempo em minutos;
- a taxa de variação depende do volume atual.

Objetivo

Calcular numericamente o volume da caixa em diferentes instantes de tempo.

Caixa d’água



Modelo matemático da caixa d'água

EDO do problema

Vamos representar o problema por:

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}08(12 - V).$$

- $V(t)$: volume de água na caixa, em litros;
- t: tempo, em minutos;
- $0{,}08$: constante do modelo, em min^{-1};
- 12: volume de equilíbrio do modelo.

Interpretação

- Se $V < 12$, então $12 - V > 0$ e $\frac{dV}{dt} > 0$: o volume aumenta.
- Se $V > 12$, então $12 - V < 0$ e $\frac{dV}{dt} < 0$: o volume diminui.
- Se $V = 12$, então $\frac{dV}{dt} = 0$: o volume permanece em equilíbrio.

Função usada no método numérico

A EDO é: $\frac{dV}{dt} = 0{,}08(12 - V)$.
Na forma geral: $\frac{dy}{dt} = f(t; y)$.
Neste problema: $y = V$.
Logo:

$$f(t; V) = 0{,}08(12 - V).$$

Observação importante

A função não depende explicitamente de t, mas ainda escrevemos:

$$f(t; V)$$

porque essa é a forma geral usada nos métodos numéricos.

Dados iniciais do exemplo

Condição inicial

Suponha que inicialmente a caixa tenha:

$$V(0) = 2.$$

Passo de tempo

Vamos usar:

$$h = 5 \text{ minutos.}$$

Objetivo do primeiro passo

Calcular uma aproximação para:

$$V(5).$$

No método numérico

Temos:

$$t_0 = 0, \qquad V_0 = 2, \qquad h = 5.$$

Aplicando RK4 na caixa d'água

A função do problema é: $f(t; V) = 0{,}08(12 - V)$.
Com: $t_0 = 0$, $V_0 = 2$ e $h = 5$.

Primeira inclinação

$$k_1 = f(t_0, V_0)$$

$$k_1 = f(0, 2)$$

$$k_1 = 0{,}08(12 - 2)$$

$$k_1 = 0{,}8.$$

Interpretação

No instante inicial, o volume está aumentando a uma taxa de:

$$0{,}8 \text{ L/min.}$$

Cálculo de k_2

Cálculo intermediário de k_2

$$
\begin{aligned}
k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2},\ V_0 + \frac{h}{2}k_1\right) \\
&= f\left(0 + \frac{5}{2},\ 2 + \frac{5}{2}\cdot 0{,}8\right) \\
&= f(2{,}5,\ 2+2) \\
&= f(2{,}5,\ 4)
\end{aligned}
$$

Função do problema

$$f(t;V) = 0{,}08(12 - V)$$

Logo:

$$k_2 = 0{,}08(12-4)$$

$$k_2 = 0{,}08 \cdot 8$$

$$k_2 = 0{,}64.$$

Atenção

O valor 4 não é o volume final. Ele é apenas uma estimativa intermediária para calcular a inclinação no meio do intervalo.

Cálculo de k_3

Fórmula de k_3

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2},\ V_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

Substituindo:

$$k_3 = f\left(0 + \frac{5}{2},\ 2 + \frac{5}{2}\cdot 0{,}64\right)$$

$$k_3 = f(2{,}5,\ 2 + 1{,}6)$$

$$k_3 = f(2{,}5,\ 3{,}6)$$

A função do problema é:

$$f(t;V) = 0{,}08(12 - V)$$

Logo: $k_3 = 0{,}08(12 - 3{,}6)$

$$k_3 = 0{,}08 \cdot 8{,}4$$

$$k_3 = 0{,}672.$$

Interpretação

O RK4 calcula uma segunda inclinação no meio do intervalo, agora usando a informação obtida em k_2.

Cálculo de k_4

Fórmula de k_4

$$k_4 = f(t_0 + h,\ V_0 + hk_3)$$

Substituindo:

$$k_4 = f(0 + 5,\ 2 + 5 \cdot 0{,}672)$$

$$k_4 = f(5,\ 2 + 3{,}36)$$

$$k_4 = f(5,\ 5{,}36)$$

Aplicando a função

A função do problema é:

$$f(t; V) = 0{,}08(12 - V)$$

Logo: $k_4 = 0{,}08(12 - 5{,}36)$

$$k_4 = 0{,}08 \cdot 6{,}64$$

$$k_4 = 0{,}5312.$$

Atenção

k_4 representa uma estimativa da inclinação no final do intervalo, não o volume final.

Atualização do volume

Fórmula do RK4

$$V_1 = V_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Substituindo:

$$V_1 = 2 + \frac{5}{6}(0{,}8 + 2 \cdot 0{,}64 + 2 \cdot 0{,}672 + 0{,}5312)$$

$$V_1 = 2 + \frac{5}{6}(0{,}8 + 1{,}28 + 1{,}344 + 0{,}5312)$$

Simplificando

$$V_1 = 2 + \frac{5}{6}(3{,}9552)$$

$$V_1 = 2 + 3{,}296$$

$$V_1 \approx 5{,}296$$

Resultado

$V(5) \approx 5{,}296$ litros

Após 5 minutos, o volume estimado pelo método RK4 é de aproximadamente $5{,}296$ litros.

Comparando com Euler

Método de Euler

$$V_1 = V_0 + hf(t_0, V_0)$$

Como:

$$V_0 = 2, \qquad h = 5, \qquad f(0,2) = 0{,}8$$

temos:

$$V_1 = 2 + 5 \cdot 0{,}8$$

$$V_1 = 2 + 4$$

$$V_1 = 6$$

Comparação dos resultados

Método	Aproximação para $V(5)$
Euler	6 litros
RK4	$5{,}296$ litros

Discussão

Euler usou apenas a inclinação inicial. O RK4 recalculou inclinações intermediárias e percebeu que, conforme o volume aumenta, a taxa

$$0{,}08(12 - V)$$

diminui.

Por que o RK4 deu um valor menor?

A taxa depende do volume

A função é:

$$f(t; V) = 0{,}08(12 - V).$$

Quando V aumenta, o termo $12 - V$ diminui.
Logo, a taxa de crescimento também diminui.

Euler

Euler calcula a taxa inicial:

$$k_1 = 0{,}8$$

e usa essa mesma taxa durante todo o intervalo.

RK4

O RK4 recalcula inclinações intermediárias e percebe que o crescimento vai desacelerando.

Resumo do primeiro passo

Dados

$$V_0 = 2, \qquad h = 5, \qquad f(t;V) = 0{,}08(12 - V).$$

Inclinações

- $k_1 = 0{,}8$
- $k_2 = 0{,}64$
- $k_3 = 0{,}672$
- $k_4 = 0{,}5312$

Resultado final

$$V_1 = V_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$V_1 \approx 5{,}296.$$

Próximos passos do método

Depois de calcular V_1

O próximo passo usa:

$$t_1 = 5, \qquad V_1 \approx 5{,}296.$$

Para calcular V_2, repetimos o processo, agora partindo de t_1 e V_1:

$$k_1 = f(t_1, V_1)$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, V_1 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, V_1 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_1 + h, V_1 + hk_3)$$

Atualização

$$V_2 = V_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Padrão

O método é repetitivo. Por isso, é muito adequado para planilhas e programas.

Solução aproximada pelo método RK4

Problema

Resolver numericamente:

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}08(12 - V), \qquad V(0) = 2, \qquad h = 5.$$

Primeiro passo

No primeiro passo, já obtivemos:

$$V_0 = 2$$

$$V_1 \approx 5{,}296$$

Portanto:

$$V(5) \approx 5{,}296$$

Ideia do processo

Para encontrar os próximos valores:

$$V_2,\ V_3,\ V_4, \ldots$$

repetimos o mesmo procedimento do RK4.

Observação

A cada novo passo, usamos o valor anterior como ponto de partida.

Resultados obtidos com RK4

Tabela de aproximações

n	t_n	V_n
0	0	2,000
1	5	5,296
2	10	7,506
3	15	8,989
4	20	9,983
5	25	10,648
6	30	11,094

Interpretação

O volume aumenta com o tempo, mas a taxa de crescimento vai diminuindo.

Comportamento esperado

Os valores se aproximam gradualmente do equilíbrio do modelo:

$$V = 12.$$

Observação

A cada passo de 5 minutos, o RK4 usa o valor anterior para calcular o próximo:

$$V_0 \to V_1 \to V_2 \to \cdots$$

Do problema da caixa d’água para o café

Mesma estrutura matemática

Na caixa d’água, usamos:

$$\frac{dV}{dt} = f(t; V).$$

No café, usaremos:

$$\frac{dT}{dt} = f(t; T).$$

- Na caixa d’água, a variável é o volume V;
- No café, a variável é a temperatura T;
- O método numérico é o mesmo.

Mensagem importante

O fenômeno físico muda, mas a lógica numérica continua igual.

Exemplo 2: esfriamento do café

Situação

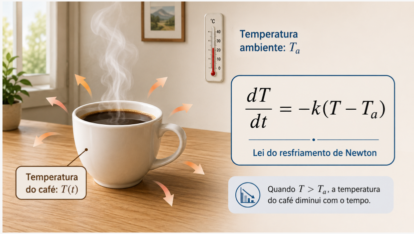
Uma xícara de café quente é deixada em uma sala com temperatura ambiente constante.

- $T(t)$: temperatura do café;
- T_a: temperatura ambiente;
- k: constante de resfriamento;
- t: tempo.

Objetivo

Calcular a temperatura aproximada do café ao longo do tempo.

Café



EDO do esfriamento do café

Lei do resfriamento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a).$$

- $T(t)$: temperatura do café;
- T_a: temperatura ambiente;
- k: constante positiva;
- $-k(T - T_a)$: taxa de variação da temperatura.

Interpretação

Se $T > T_a$, então:

$$T - T_a > 0$$

e:

$$\frac{dT}{dt} < 0.$$

Portanto, a temperatura do café diminui.

Função usada no método RK4

A forma geral de uma EDO de primeira ordem é:

$$\frac{dy}{dt} = f(t; y)$$

No problema do café, a variável dependente é a temperatura:

$$y = T$$

Portanto, escrevemos:

$$\frac{dT}{dt} = f(t; T)$$

Função do problema

A EDO é:

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}08(T - 25)$$

Logo:

$$f(t; T) = -0{,}08(T - 25)$$

Observação

A função não depende explicitamente de t, mas continuamos escrevendo:

$$f(t; T)$$

porque essa é a forma geral do método.

Preparação para o primeiro passo

Valores iniciais

Temos:

$$t_0 = 0$$

$$T_0 = 80$$

$$h = 5$$

Objetivo

Queremos calcular:

$$T_1 \approx T(5)$$

Fórmula do RK4

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Inclinações

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$$

representam estimativas da taxa de variação da temperatura dentro do intervalo.

Cálculo de k_1

Fórmula de k_1

$$k_1 = f(t_0; T_0)$$

Substituindo:

$$k_1 = f(0; 80)$$

A função é:

$$f(t;T) = -0{,}08(T - 25)$$

Aplicando a função

$$k_1 = -0{,}08(80 - 25)$$

$$k_1 = -0{,}08 \cdot 55$$

$$k_1 = -4{,}4$$

Interpretação

No instante inicial, o café está esfriando a uma taxa de:

$$4{,}4°C/\text{min}$$

Cálculo de k_2

Fórmula de k_2

$$k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, T_0 + \frac{h}{2}k_1\right)$$

Substituindo:

$$k_2 = f\left(0 + \frac{5}{2}, 80 + \frac{5}{2}(-4{,}4)\right)$$

$$k_2 = f(2{,}5;\ 80 - 11)$$

$$k_2 = f(2{,}5;\ 69)$$

Aplicando a função

$$k_2 = -0{,}08(69 - 25)$$

$$k_2 = -0{,}08 \cdot 44$$

$$k_2 = -3{,}52$$

Atenção

O valor 69 não é a temperatura final. Ele é apenas uma estimativa intermediária para calcular a inclinação no meio do intervalo.

Cálculo de k_3

Fórmula de k_3

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, T_0 + \frac{h}{2}k_2\right)$$

Substituindo:

$$k_3 = f\left(0 + \frac{5}{2}, 80 + \frac{5}{2}(-3{,}52)\right)$$

$$k_3 = f(2{,}5;\ 80 - 8{,}8)$$

$$k_3 = f(2{,}5;\ 71{,}2)$$

Aplicando a função

$$k_3 = -0{,}08(71{,}2 - 25)$$

$$k_3 = -0{,}08 \cdot 46{,}2$$

$$k_3 = -3{,}696$$

Interpretação

O RK4 calcula outra inclinação no meio do intervalo, agora usando a informação obtida em k_2.

Cálculo de k_4

Fórmula de k_4

$$k_4 = f(t_0 + h,\ T_0 + hk_3)$$

Substituindo:

$$k_4 = f(0 + 5,\ 80 + 5(-3{,}696))$$

$$k_4 = f(5,\ 80 - 18{,}48)$$

$$k_4 = f(5,\ 61{,}52)$$

Aplicando a função

$$k_4 = -0{,}08(61{,}52 - 25)$$

$$k_4 = -0{,}08 \cdot 36{,}52$$

$$k_4 = -2{,}9216$$

Atenção

k_4 representa uma estimativa da inclinação no final do intervalo.
Ele não é a temperatura final.

Atualização da temperatura

Fórmula do RK4

$$T_1 = T_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Substituindo:

$$T_1 = 80 + \frac{5}{6}\left[-4{,}4 + 2(-3{,}52) + 2(-3{,}696) + (-2{,}9216)\right]$$

$$T_1 = 80 + \frac{5}{6}\left[-4{,}4 - 7{,}04 - 7{,}392 - 2{,}9216\right]$$

Simplificando

$$T_1 = 80 + \frac{5}{6}(-21{,}7536)$$

$$T_1 = 80 - 18{,}128$$

$$T_1 = 61{,}872$$

Resultado

$$T(5) \approx 61{,}872°C$$

Interpretação

Após 5 minutos, o café está aproximadamente a: $61{,}872°C$.

Comparando com Euler

Euler

Pelo método de Euler:

$$T_1 = T_0 + hf(t_0, T_0)$$
$$T_0 = 80, \qquad h = 5, \qquad f(0, 80) = -4{,}4$$

$$T_1 = 80 + 5(-4{,}4)$$
$$T_1 = 80 - 22$$
$$T_1 = 58$$

RK4

Pelo método RK4:

$$T(5) \approx 61{,}872°C$$

Comparação

Método	$T(5)$
Euler	$58°C$
RK4	$61{,}872°C$

Discussão

Euler usa apenas a taxa inicial de resfriamento.
O RK4 considera inclinações intermediárias e representa melhor a redução da taxa conforme o café esfria.

Por que a taxa de resfriamento diminui?

EDO do problema

$$\frac{dT}{dt} = -0{,}08(T - 25)$$

A taxa de variação depende da diferença:

$$T - 25$$

Quando o café está muito quente, essa diferença é grande.
Quando o café vai esfriando, essa diferença diminui.

No início

Se:

$$T = 80$$

então:

$$T - 25 = 55$$

e:

$$\frac{dT}{dt} = -4{,}4$$

Mais tarde

Quando T se aproxima de $25°C$, a diferença $T - 25$ fica menor.
Assim, o café continua esfriando, mas cada vez mais lentamente.

Resumo do primeiro passo com RK4

Dados

$$T_0 = 80$$

$$h = 5$$

$$f(t;T) = -0{,}08(T - 25)$$

Inclinações

$$k_1 = -4{,}4$$
$$k_2 = -3{,}52$$
$$k_3 = -3{,}696$$
$$k_4 = -2{,}9216$$

Atualização

$$T_1 = T_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$T_1 = 80 + \frac{5}{6}(-21{,}7536)$$

$$T_1 = 61{,}872$$

Resultado

$$T(5) \approx 61{,}872°C$$

Resultados obtidos com RK4

Tabela de aproximações

n	t_n	T_n
0	0	80,000
1	5	61,872
2	10	49,719
3	15	41,572
4	20	36,110
5	25	32,448
6	30	29,993

Interpretação

A temperatura diminui com o tempo, mas a taxa de resfriamento também diminui.

Comportamento esperado

A temperatura do café se aproxima gradualmente da temperatura ambiente:

$$T_a = 25°C.$$

Observação

O café não chega imediatamente a $25°C$. Ele se aproxima desse valor ao longo do tempo.