

Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas¹

¹Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026



Encontro 4: Zeros de Funções

Objetivos

FEU

- O que é
- Funções de 1º, 2º e 3º grau.
- Métodos numéricos para determinação de zero funções
- Processo iterativo
- Gráfico em Python
- Teorema de Bolzano
- Método da bisseção
- Critério de parada
- Exemplo no Excel

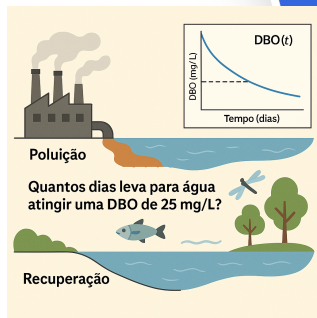


Exemplo na EAS: Quanto tempo a água leva para se recuperar?

FEU

Quando uma indústria lança resíduos orgânicos em um rio, esses resíduos consomem o oxigênio dissolvido na água, prejudicando a vida aquática. Para avaliar esse impacto, os engenheiros usam uma medida chamada **Demanda Bioquímica de Oxigênio** (DBO).

A DBO indica a quantidade de oxigênio necessária para decompor a matéria orgânica presente na água. Quanto maior a DBO, **pior está a qualidade da água**. Com o tempo, a natureza "limpa" esse poluente, e a DBO vai diminuindo até níveis aceitáveis.



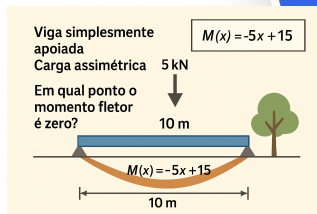
Exemplo na EC: Cálculo de Esforços Internos em Vigas



Imagine uma viga de concreto usada para sustentar o teto de uma sala. Ela está apoiada nas duas extremidades. Agora, alguém coloca uma carga pesada — como um ar-condicionado — mais perto de um dos lados da viga.

Essa carga faz com que a viga se curve para baixo. Mas ela não se curva igualmente em todos os pontos: algumas partes estão mais forçadas que outras. Em algum lugar ao longo da viga, a estrutura está no seu ponto mais exigido.

Pergunta: **Como saber exatamente onde está esse ponto crítico?**



Reflexão



O que esses problemas têm em comum?

Todos esses problemas envolvem encontrar um ponto onde algo se anula.

$\Rightarrow$ Encontrar o valor de x tal que $f(x) = 0$

É exatamente isso que chamamos de zero de uma função.

Zero Funções



O que é?

É o valor de x tal que $f(x) = 0$, ou seja, o ponto onde o gráfico intercepta o eixo x .

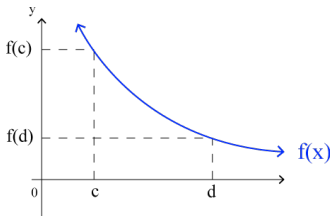
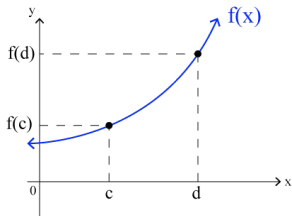
Funções de:

- Primeiro grau
- Segundo grau
- Terceiro grau

Função de primeiro grau



As funções do tipo $y = ax + b$ ou $f(x) = ax + b$, onde a e b assumem valores reais e $a \neq 0$ são consideradas funções do 1º grau.



- A função é crescente quando $a > 0$ e;
- Decrescente quando $a < 0$.

Raiz de uma função de primeiro grau

Raiz é o valor de x que anula $f(x)$. Para calcular a função é necessário igualar a equação a zero.

$$f(x) = y = 0$$

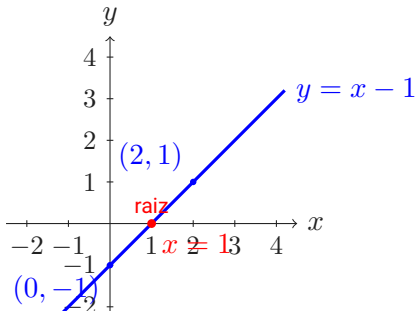
$$f(\text{raiz}) = y = 0$$

$$f(x) = ax + b$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

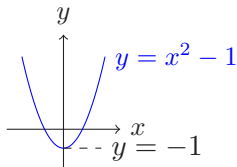
$$x = -\frac{b}{a}$$



Raiz de uma função de segundo grau



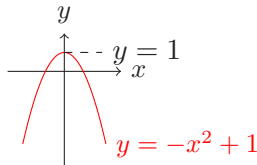
Raiz é o valor de x que anula $f(x)$. Para calcular a função é necessário igualar a equação a zero. Utilizando a fórmula de Bhaskara é possível encontrar as raízes da função x' e x'' .



(a) Parábola com concavidade para cima.

Além disso, o valor do delta nos permite saber quantos zeros a função quadrática possuirá.

- $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas;
- $\Delta = 0$: uma única raiz real;
- $\Delta < 0$: não possui raiz real.



(b) Parábola com concavidade para baixo.

Figure 1: Gráficos de parábolas com concavidade para cima e para baixo

Exemplos

Pode-se observar os seguintes exemplos:

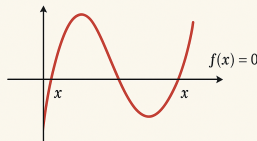
1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{8}{3}x - 4$

3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Zeros de Funções

O objetivo é resolver a equação $f(x) = 0$, ou seja, encontrar os pontos onde o gráfico da função cruza o eixo x .



Exemplos

Embora existam métodos analíticos para determinados casos, sua resolução pode tornar-se trabalhosa, tornando os métodos numéricos especialmente úteis, por exemplo:

- $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$
- $\sin(x) + e^x$
- $x + \ln(x)$

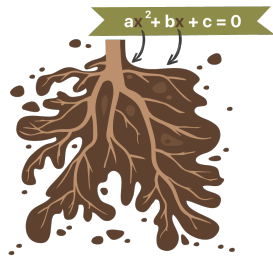


Métodos numéricos para determinação de zeros de funções



A ideia central destes métodos é partir de uma **aproximação inicial** para a raiz e em seguida refinar essa aproximação através de um **processo iterativo**.

1. Isolar cada zero que se deseja determinar da função f em um intervalo $[a, b]$, é desejável isolar cada raiz em um intervalo distinto f .
2. Calcular a raiz aproximada através de um processo iterativo até a precisão desejada.



Processo iterativo



Iteração

É o ato de iterar (repetir) uma função por um determinado período de tempo até que uma condição seja alcançada.

- Há uma ampla variedade de métodos numéricos que consistem em processos iterativos. Esses processos são definidos pela repetição de uma operação específica.
- A essência desse tipo de procedimento é realizar um cálculo específico repetidamente, de modo gerar sucessivas aproximações que, quando o método converge, tendem à solução.
- É fundamental ressaltar que em cada iteração, o resultado obtido na iteração anterior é utilizado como parâmetro de entrada para o cálculo subsequente.

Processo iterativo



Há vários aspectos comuns a todos os processos iterativos:

Estimativa inicial

Para iniciar um processo iterativo, é necessário possuir uma estimativa inicial do resultado do problema. Esta estimativa pode ser adquirida de várias maneiras, dependendo da natureza do problema.

Convergência

Para alcançar um resultado próximo do esperado, é crucial que a cada passo ou iteração, nosso resultado se aproxime cada vez mais do valor desejado.

Critério de parada

Não é viável continuar um processo numérico indefinidamente. É necessário interrompê-lo em algum momento. Determinar quando parar as iterações de um processo numérico é chamado de critério de parada, o qual varia conforme o problema em questão e a precisão desejada para obter a solução.

Problema: Ajuste de temperatura

Uma estufa deve atingir a temperatura de **30°C** para o cultivo ideal.

No entanto, a temperatura inicial é de **20°C**.

O sistema de controle realiza ajustes progressivos:

- A cada etapa, corrige **metade da diferença** entre a temperatura atual e a desejada

Pergunta:

- Como podemos modelar esse processo?
- Quantas iterações são necessárias para atingir uma temperatura suficientemente próxima de 30°C?

Considere uma tolerância de erro de $\varepsilon = 0,1$

Exemplo de processo iterativo em Python

Contexto: Ajuste de temperatura de uma estufa.

- Temperatura inicial: 20°C
- Temperatura desejada: 30°C
- A cada passo, corrigimos metade do erro

```
temperatura = 20
alvo = 30
epsilon = 0.1
iteracao = 0
while abs(alvo - temperatura) > epsilon:
    erro = alvo - temperatura
    print(f"Iteração {iteracao}: T = {temperatura:.4f}, erro = {erro:.4f}")
    temperatura = temperatura + erro / 2
    iteracao = iteracao + 1
print(f"Temperatura aproximada final: {temperatura:.4f}")
```

Elementos de um processo iterativo

Analisando o código:

- **Estimativa inicial:**

$$T = 20$$

- **Iteração:** Cada repetição do `while` representa uma nova tentativa
- **Uso do valor anterior:**

$$T_{\text{novo}} = T_{\text{atual}} + \frac{\text{erro}}{2}$$

- **Convergência:** O erro diminui a cada iteração

Critério de parada

O processo não pode continuar indefinidamente.

Neste exemplo, utilizamos:

$$|alvo - T| < \varepsilon$$

- ε é a tolerância desejada
- Representa o erro aceitável
- Quando o erro fica pequeno o suficiente, paramos

Interpretação:

- Não precisamos do valor exato
- Precisamos de um valor **suficientemente próximo**

Atividade – Caixa d'água e baldes

Uma caixa d'água tem capacidade de **48 litros**.

Um balde comporta **7,5 litros**, mas, para evitar derramar, é usado apenas até a marcação de **7 litros**.

Pergunta: Quantos baldes são necessários para encher a caixa d'água?

Orientações:

- Comece com uma estimativa inicial (1 balde).
- Vá repetindo o processo, balde por balde, até se aproximar de 48 litros.
- Registre cada tentativa na tabela fornecida.
- Depois, compare o resultado com a simulação em Python.

Tabela de preenchimento



Tentativa (n)	Volume acumulado (L)	Diferença para 48 L
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Código em Python

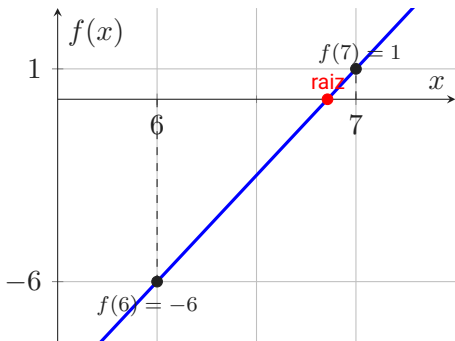


```
capacidade = 48
balde = 7    # usamos só até a marcação de 7 L
agua = 0
tentativa = 0

while agua < capacidade:
    tentativa = tentativa + 1
    agua = tentativa * balde
    print(f"Tentativa {tentativa}: {agua} L")

print(f"Foram necessários {tentativa} baldes.")
```

Do exemplo dos baldes para a ideia de raiz



Considere a função:

$$f(x) = 7x - 48$$

- $f(6) = -6$
- $f(7) = 1$

Como há troca de sinal entre 6 e 7, existe uma raiz nesse intervalo.

Isso mostra que a quantidade exata de baldes está entre 6 e 7.

Processos iterativos



Há diversos métodos para encontrar os zeros de uma função:

1. Método da Bisseção;
2. Método do Ponto Fixo (MPF);
3. Método de Newton-Raphson;
4. Método da Secante;
5. Método de Muller;
6. Método de Brent.

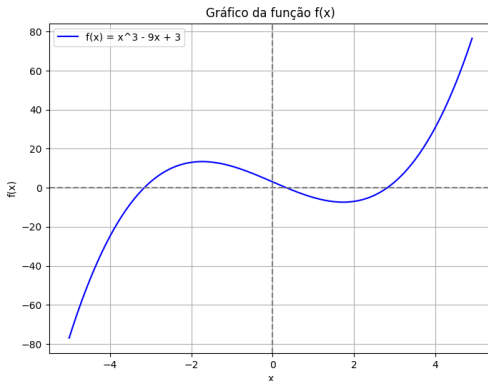


Função de terceiro grau



Funções de grau maior podem apresentar comportamento mais complexo e possuir múltiplas raízes reais.

Nem sempre é simples ou conveniente encontrar suas raízes analiticamente



Gerar gráfico em Python



```
1 !pip install matplotlib
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
```

```
1 # Definindo a função f(x)
2 def f(x):
3     return x**3 - 9*x + 3
```

```
1 x_values = np.arange(-5, 5, 0.1) # Criando um array de valores de x
2 y_values = f(x_values) # Calculando os valores de f(x) para cada x
3 # Plotando o gráfico
4 plt.figure(figsize=(8, 6))
5 plt.plot(x_values, y_values, label='f(x) = x^3 - 9x + 3', color='b')
6 plt.axhline(0, color='gray', linestyle='--') # Linha horizontal y=0
7 plt.axvline(0, color='gray', linestyle='--') # Linha vertical x=0
8 plt.xlabel('x')
9 plt.ylabel('f(x)')
10 plt.title('Gráfico da função f(x)')
11 plt.grid(True)
12 plt.legend()
13 plt.show()
```

Teorema de Bolzano



Teorema

Seja uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, tal que, $f(a) \times f(b) < 0$, então a função $f(x)$ possui pelo menos uma raiz real no intervalo $[a, b]$.

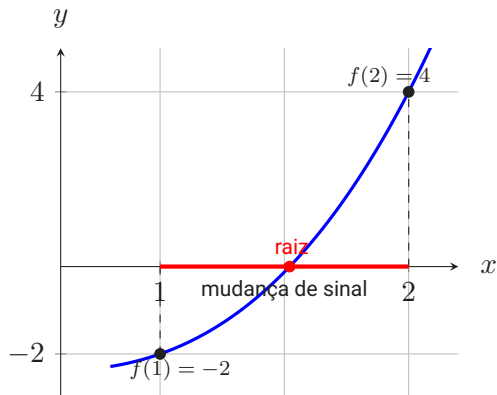
"O teorema assegura que se f troca de sinal nos pontos a e b então f tem pelo menos um zero entre estes pontos".

Teorema de Bolzano (explicação simples)

Se uma função for contínua e mudar de sinal entre dois pontos, ela precisa cruzar o zero em algum lugar entre eles.



Antes de calcular...



Considere a função:

$$f(x) = x^3 - x - 2$$

- $f(1) = -2$
- $f(2) = 4$

Como:

$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

há troca de sinal no intervalo $[1, 2]$.

Pelo Teorema de Bolzano, existe pelo menos uma raiz real em $[1, 2]$.

Exemplo

Seja a função $f(x) = x \times \ln(x) - 3,2$.

Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x , como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
-----	---	---	---	---



Exemplo

Seja a função $f(x) = x \times \ln(x) - 3,2$.

Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x , como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3,20	-1,81	0,10	2,36



Exemplo

Seja a função $f(x) = x \times \ln(x) - 3,2$.

Calcule o valor de $f(x)$ para valores arbitrários de x , como mostrado na tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	-3,20	-1,81	0,10	2,36

Pelo teorema de Bolzano, concluímos que existe pelo menos uma raiz real no intervalo $[2, 3]$.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$.



Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.
- O subintervalo onde ocorre a troca de sinal passa a ser o novo intervalo de análise.

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.
- O subintervalo onde ocorre a troca de sinal passa a ser o novo intervalo de análise.
- Repetimos o processo até que o comprimento do intervalo seja menor que uma tolerância predefinida (precisão).

Ideia do Método da Bisseção

Objetivo é encontrar uma raiz real de uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, onde $f(a) \cdot f(b) < 0$. O processo funciona assim:

- Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo dois subintervalos:

$$\left[a, \frac{a+b}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$$

- Aplicamos o Teorema de Bolzano para verificar em qual dos dois subintervalos ocorre a troca de sinal.
- O subintervalo onde ocorre a troca de sinal passa a ser o novo intervalo de análise.
- Repetimos o processo até que o comprimento do intervalo seja menor que uma tolerância predefinida (precisão).

A cada passo, a raiz da função é aproximada pelo ponto médio do subintervalo corrente.

Método da bisseção: Critério de parada

- O critério de parada é baseado na tolerância desejada ε .
- O processo iterativo pode ser interrompido quando o intervalo de busca for suficientemente pequeno:

$$|b - a| < \varepsilon$$

- Ou quando o valor da função no ponto médio estiver suficientemente próximo de zero:

$$|f(c)| < \varepsilon$$

- Em ambos os casos, considera-se que a raiz foi encontrada com a precisão desejada.

Exercício – Método da Bisseção

Considere a função:

$$f(x) = x^3 - 9x + 3$$

Queremos encontrar uma raiz real dessa função no intervalo $[0, 1]$, aplicando o método da bisseção.

Use os seguintes critérios de parada:

- Número máximo de iterações: 5
- OU erro absoluto (tamanho do intervalo): $\varepsilon < 0,05$

Solicitado:

1. Aplique o método da bisseção para encontrar uma aproximação da raiz.
2. Preencha a tabela com os valores de $a, b, c, f(a), f(b), f(c)$, e $\varepsilon = |b - a|$.
3. Identifique o intervalo final que contém a raiz.

Resumo do Método da Bisseção



1. Escolha a e b , com $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. Calcule $c = \frac{a + b}{2}$
3. Defina a tolerância ε
4. **Enquanto** $|b - a| > \varepsilon$, faça:
 - Se $f(a) \cdot f(c) < 0$, então:
 - $b \leftarrow c$
 - Caso contrário:
 - $a \leftarrow c$
 - Recalcule $c = \frac{a + b}{2}$
5. Ao final, c é a raiz aproximada