Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR



Encontro 16: Sistemas Lineares

Objetivos

- Entender métodos iterativos
- Definir critério de parada
- Aplicar o método de Gauss-Jacobi
- Comparar a ideia com Gauss-Seidel



Métodos diretos e métodos iterativos

Na resolução de sistemas lineares, podemos usar dois tipos principais de métodos:

Métodos diretos

Encontram a solução após uma sequência finita de operações.

Exemplo: eliminação de Gauss.

Métodos iterativos

Começam com uma aproximação inicial e melhoram a solução passo a passo.

Exemplos: Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel.

Ideia dos métodos iterativos

Nos métodos iterativos, não encontramos a solução de uma vez.

Começamos com um chute inicial:

$$x^{(0)}$$

Depois calculamos uma nova aproximação:

$$x^{(1)}$$

Em seguida:

$$x^{(2)}, \quad x^{(3)}, \quad x^{(4)}, \ldots$$

Ideia central
O método para quando a diferença entre duas aproximações consecutivas fica pequena.

Critério de parada

Podemos usar o critério de parada/convergência para os métodos iterativos.

A ideia é comparar a solução nova com a solução anterior.

Erro relativo aproximado

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|}$$

- Se ε for grande, continuamos iterando.
- Se ε for pequeno, paramos.

Critério de parada

Neste encontro, vamos usar:

$$\varepsilon < 0,1$$

Interpretação
Quando a mudança relativa entre duas aproximações consecutivas for menor que $0,1$, consideraremos que o método convergiu.

Ou seja:

$$\frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|} < 0,1$$

Gauss-Jacobi

O método de Gauss-Jacobi é um método iterativo para resolver sistemas lineares.

A ideia é transformar cada equação do sistema em uma fórmula para calcular uma variável.

> **Ideia**
> Isolamos cada incógnita em sua respectiva equação.

Por exemplo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

pode ser reescrita como:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

Gauss-Jacobi

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 \quad\quad + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

No Gauss-Jacobi, isolamos as variáveis:

$$x_1 = \frac{7 - 2x_2 - x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{-8 - x_1 - x_3}{5}$$

$$x_3 = \frac{6 - 2x_1 - 3x_2}{10}$$

Gauss-Jacobi: chute inicial

Para começar o método, precisamos escolher uma aproximação inicial.

Vamos usar:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Ou seja:

$$x_1^{(0)} = 0, \qquad x_2^{(0)} = 0, \qquad x_3^{(0)} = 0$$

Observação
O chute inicial não precisa ser a solução correta. Ele serve apenas como ponto de partida.

Gauss-Jacobi: primeira iteração

Usando:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 0$$

temos:

$$x_1^{(1)} = \frac{7 - 2(0) - 0}{10} = 0,7$$

$$x_2^{(1)} = \frac{-8 - 0 - 0}{5} = -1,6$$

$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 2(0) - 3(0)}{10} = 0,6$$

Portanto:

$$x^{(1)} = (0,7,\ -1,6,\ 0,6)$$

Gauss-Jacobi: segunda iteração

Agora usamos os valores da iteração anterior:

$$x^{(1)} = (0,7,\ -1,6,\ 0,6)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7 - 2(-1,6) - 0,6}{10} = \frac{9,6}{10} = 0,96$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-8 - 0,7 - 0,6}{5} = \frac{-9,3}{5} = -1,86$$

$$x_3^{(2)} = \frac{6 - 2(0,7) - 3(-1,6)}{10} = \frac{9,4}{10} = 0,94$$

Portanto:

$$x^{(2)} = (0,96,\ -1,86,\ 0,94)$$

Gauss-Jacobi: cálculo do erro

Temos a fórmula do erro:

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|}$$

Para esta etapa:

$$x^{(1)} = (0,7;\ -1,6;\ 0,6)$$

$$x^{(2)} = (0,96;\ -1,86;\ 0,94)$$

Numerador:

$$\max |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|$$

$$= \max(0,26;\ 0,26;\ 0,34)$$

Denominador:

$$\max |x_i^{(2)}|$$

$$= \max(|0,96|;\ |-1,86|;\ |0,94|)$$

Gauss-Jacobi: decisão de parada

Substituindo na fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}|}{\max |x_i^{(2)}|}$$

$$\varepsilon = \frac{0,34}{1,86}$$

$$\varepsilon \approx 0,183$$

Como o critério definido foi:

$$\varepsilon < 0,1$$

temos:

$$0,183 > 0,1$$

Ainda não podemos parar. Precisamos fazer mais uma iteração.

Gauss-Jacobi: terceira iteração

Usando:

$$x^{(2)} = (0,96,\ -1,86,\ 0,94)$$

$$x_1^{(3)} = \frac{7 - 2(-1,86) - 0,94}{10} = 0,978$$

$$x_3^{(3)} = \frac{6 - 2(0,96) - 3(-1,86)}{10} = 0,966$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-8 - 0,96 - 0,94}{5} = -1,98$$

Portanto:

$$x^{(3)} = (0,978,\ -1,98,\ 0,966)$$

Gauss-Jacobi: erro da terceira iteração

Temos:

$$x^{(2)} = (0,96,\ -1,86,\ 0,94)$$

$$x^{(3)} = (0,978,\ -1,98,\ 0,966)$$

Diferenças:

$$|0,978 - 0,96| = 0,018$$

$$|-1,98 + 1,86| = 0,12$$

$$|0,966 - 0,94| = 0,026$$

Maior diferença:

$$\max |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0,12$$

Maior valor da nova aproximação:

$$\max |x_i^{(3)}| = 1,98$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{0,12}{1,98} \approx 0,061$$

$$0,061 < 0,1$$

Gauss-Jacobi: conclusão do exemplo

Como:

$$\varepsilon \approx 0,061 < 0,1$$

o método atingiu o critério de parada.

Resultado aproximado

$$x_1 \approx 0,978$$

$$x_2 \approx -1,98$$

$$x_3 \approx 0,966$$

Número de iterações

O método convergiu em:

3 iterações

Critério usado

$$\varepsilon < 0,1$$

Forma matricial do Gauss-Jacobi

O sistema linear pode ser escrito como:

$$Ax = b$$

No método de Gauss-Jacobi, decompomos a matriz A em:

$$A = D + L + U$$

onde:

- D é a matriz diagonal;
- L é a parte inferior da matriz;
- U é a parte superior da matriz.

Forma matricial do Gauss-Jacobi

A fórmula matricial do método é:

Gauss-Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left(b - (L+U)x^{(k)}\right)$$

Observação importante

Essa fórmula é apenas uma forma compacta de representar o processo de isolar cada variável e calcular uma nova aproximação.

Gauss-Jacobi: algoritmo

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$.
2. Isolar cada variável do sistema.
3. Calcular uma nova aproximação $x^{(k+1)}$.
4. Calcular o erro.
5. Se o erro for menor que a tolerância, parar.
6. Caso contrário, repetir o processo.

Nesta aula
Usamos $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ e $\varepsilon < 0,1$.

Exercício

Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Jacobi.

Sistema linear

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17 \end{cases}$$

Use:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Critério de parada:

$$\varepsilon < 0,1$$

Objetivo

Determine a aproximação final e o número de iterações.

Exercício: primeiro passo

Isole cada variável do sistema:

$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 = \frac{2 - x_2 - x_3}{-3}$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$$

$$x_2 = \frac{5 - x_1 - x_3}{5}$$

$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17$$

$$x_3 = \frac{-17 - x_1 - 3x_2}{7}$$

Próximo passo

Usar:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

e iniciar as iterações.

Exercício: resultado esperado

Usando:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

e critério:

$$\varepsilon < 0,1$$

o método converge em:

$$3 \text{ iterações}$$

Aproximação obtida

$$x_1 \approx -1,048$$

$$x_2 \approx 1,781$$

$$x_3 \approx -2,959$$



Encontro 17: Sistemas Lineares

Objetivos

- Relembrar métodos iterativos
- Aplicar o critério de parada
- Entender o método de Gauss-Seidel
- Comparar Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel



Relembrando: métodos iterativos

Na aula anterior, vimos que os métodos iterativos começam com uma aproximação inicial.

Por exemplo:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Depois calculamos novas aproximações:

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad x^{(3)}, \ldots$$

Ideia central
A cada iteração, esperamos que a aproximação fique mais próxima da solução do sistema.

Critério de parada

Para saber quando parar, comparamos a nova aproximação com a aproximação anterior.

Erro relativo aproximado

$$\varepsilon = \frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|}$$

- Se ε for grande, continuamos iterando.
- Se ε for pequeno, paramos.

Critério de parada

Nesta aula, vamos usar novamente:

$$\varepsilon < 0,1$$

Interpretação
Quando a mudança relativa entre duas aproximações consecutivas for menor que $0,1$, consideraremos que o método convergiu.

Ou seja:

$$\frac{\max |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{\max |x_i^{(k+1)}|} < 0,1$$

Gauss-Jacobi: lembrando a ideia

No método de Gauss-Jacobi, todas as novas incógnitas são calculadas usando apenas os valores da iteração anterior.

Ou seja, para calcular:

$$x^{(k+1)}$$

usamos somente os valores de:

$$x^{(k)}$$

Característica do Jacobi
Durante uma iteração, os valores novos só são usados na próximas iteração.

Gauss-Seidel: ideia principal

O método de Gauss-Seidel é parecido com o método de Gauss-Jacobi.

A diferença está na forma como os valores são atualizados.

> **Ideia do Gauss-Seidel**
> Assim que uma nova incógnita é calculada, ela já é usada no cálculo das próximas incógnitas da mesma iteração.

Isso pode fazer o método convergir mais rapidamente em muitos casos.

Comparação entre Jacobi e Seidel

Gauss-Jacobi

Calcula todos os novos valores usando apenas a iteração anterior.

$$x_1^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$$

Gauss-Seidel

Usa imediatamente os valores recém-calculados.

$$x_1^{(k+1)} \leftarrow x^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} \leftarrow x_1^{(k+1)}$$

$$x_3^{(k+1)} \leftarrow x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}$$

Gauss-Seidel: fórmula geral

Para um sistema linear:

$$Ax = b$$

a fórmula geral do método de Gauss-Seidel é:

Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Os termos $x_j^{(k+1)}$ representam valores novos, já atualizados.
- Os termos $x_j^{(k)}$ representam valores antigos, da iteração anterior.

Gauss-Seidel: interpretação da fórmula

A fórmula pode parecer grande, mas a ideia é simples.

Em cada equação:

1. isolamos uma incógnita;
2. calculamos x_1;
3. usamos o novo x_1 para calcular x_2;
4. usamos os novos x_1 e x_2 para calcular x_3;
5. repetimos até atingir o critério de parada.

Resumo
No Gauss-Seidel, os valores são atualizados imediatamente.

Exemplo: sistema linear

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 \quad\quad + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Vamos usar:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

e o critério de parada:

$$\varepsilon < 0,1$$

Exemplo: isolando as variáveis

Isolando cada variável, temos:

$$x_1 = \frac{7 - 2x_2 - x_3}{10}$$

$$x_2 = \frac{-8 - x_1 - x_3}{5}$$

$$x_3 = \frac{6 - 2x_1 - 3x_2}{10}$$

Atenção
No Gauss-Seidel, cada novo valor calculado já será usado na mesma iteração.

Gauss-Seidel: primeira iteração

Usando:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Primeiro calculamos $x_1^{(1)}$:

$$x_1^{(1)} = \frac{7 - 2(0) - 0}{10} = 0,7$$

Agora usamos esse novo valor para calcular $x_2^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = \frac{-8 - 0,7 - 0}{5} = -1,74$$

Agora usamos $x_1^{(1)}$ e $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = \frac{6 - 2(0,7) - 3(-1,74)}{10}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{9,82}{10} = 0,982$$

Portanto:

$$x^{(1)} = (0,7;\ -1,74;\ 0,982)$$

Gauss-Seidel: segunda iteração

Agora usamos:

$$x^{(1)} = (0,7;\ -1,74;\ 0,982)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{7 - 2(-1,74) - 0,982}{10}$$

$$x_1^{(2)} = \frac{9,498}{10} = 0,9498$$

$$x_2^{(2)} = \frac{-8 - 0,9498 - 0,982}{5}$$

$$x_2^{(2)} = -1,98636$$

$$x_3^{(2)} = \frac{6 - 2(0,9498) - 3(-1,98636)}{10}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{10,05948}{10}$$

$$x_3^{(2)} = 1,005948$$

Portanto:

$$x^{(2)} = (0,9498;\ -1,98636;\ 1,005948)$$

Gauss-Seidel: erro da segunda iteração

Temos:

$$x^{(1)} = (0,7;\ -1,74;\ 0,982)$$

$$x^{(2)} = (0,9498;\ -1,98636;\ 1,005948)$$

Diferenças:

$$|0,9498 - 0,7| = 0,2498$$

$$|-1,98636 + 1,74| = 0,24636$$

$$|1,005948 - 0,982| = 0,023948$$

Maior diferença:

Maior valor da nova aproximação:

$$\max|x_i^{(2)}| = \max(0,9498;\ 1,98636;\ 1,005948)$$

$$\max|x_i^{(2)}| = 1,98636$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{0,2498}{1,98636}$$

Gauss-Seidel: decisão de parada

Na segunda iteração, encontramos:

$$\varepsilon \approx 0,126$$

O critério definido foi:

$$\varepsilon < 0,1$$

Como:

$$0,126 > 0,1$$

Conclusão
Ainda não podemos parar. Precisamos fazer mais uma iteração.

Vamos calcular a terceira iteração.

Gauss-Seidel: terceira iteração

Usando:

$$x^{(2)} = (0,9498;\ -1,98636;\ 1,005948)$$

$$x_1^{(3)} = \frac{7 - 2(-1,98636) - 1,005948}{10}$$

$$x_1^{(3)} = 0,9966772$$

$$x_2^{(3)} = \frac{-8 - 0,9966772 - 1,005948}{5}$$

$$x_2^{(3)} = -2,00052504$$

$$x_3^{(3)} = \frac{6 - 2(0,9966772) - 3(-2,00052504)}{10}$$

$$x_3^{(3)} = 1,00082207$$

Portanto:

$$x^{(3)} = (0,9966772;\ -2,00052504;\ 1,00082207)$$

Gauss-Seidel: erro da terceira iteração

Temos:

$$x^{(2)} = (0,9498;\ -1,98636;\ 1,005948)$$

$$x^{(3)} = (0,9966772;\ -2,00052504;\ 1,00082207)$$

Diferenças:

$$|0,9966772 - 0,9498| = 0,0468772$$

$$|-2,00052504 + 1,98636| = 0,01416504$$

Maior diferença:

$$\max |x_i^{(3)} - x_i^{(2)}| = 0,0468772$$

Maior valor da nova aproximação:

$$\max |x_i^{(3)}| = 2,00052504$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{0,0468772}{2,00052504}$$

$$\varepsilon \approx 0,023$$

$$0,023 < 0,1$$

Gauss-Seidel: conclusão do exemplo

Como:

$$\varepsilon \approx 0,023 < 0,1$$

o método atingiu o critério de parada.

Resultado aproximado

$$x_1 \approx 0,997$$

$$x_2 \approx -2,001$$

$$x_3 \approx 1,001$$

Número de iterações

O método convergiu em:

3 iterações

Critério usado

$$\varepsilon < 0,1$$

Comparação: Jacobi e Seidel no exemplo

Para o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 \quad\quad + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

usando:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0) \qquad \varepsilon < 0,1$$

Gauss-Jacobi

3 iterações

$x \approx (0,978;\ -1,98;\ 0,966)$

Gauss-Seidel

3 iterações

$x \approx (0,997;\ -2,001;\ 1,001)$

Observação importante

Neste exemplo, os dois métodos atingiram o critério de parada em 3 iterações.

Mesmo assim, o método de Gauss-Seidel chegou mais perto da solução exata:

$$x = (1,\ -2,\ 1)$$

Interpretação
Isso aconteceu porque o Gauss-Seidel usa os valores mais recentes dentro da própria iteração.

Forma matricial do Gauss-Seidel

O sistema linear pode ser escrito como:

$$Ax = b$$

Decompomos a matriz A em:

$$A = D + L + U$$

onde:

- D é a matriz diagonal;
- L é a parte inferior da matriz;
- U é a parte superior da matriz.

Forma matricial do Gauss-Seidel

No método de Gauss-Seidel, usamos:

Gauss-Seidel

$$x^{(k+1)} = (D + L)^{-1} \left(b - U x^{(k)} \right)$$

Observação
Essa fórmula representa, de forma compacta, a atualização sequencial das incógnitas.

Algoritmo do Gauss-Seidel

1. Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$.
2. Isolar cada variável do sistema.
3. Calcular $x_1^{(k+1)}$.
4. Usar o novo $x_1^{(k+1)}$ para calcular $x_2^{(k+1)}$.
5. Usar os valores novos disponíveis para calcular as próximas incógnitas.
6. Calcular o erro.
7. Se o erro for menor que a tolerância, parar.
8. Caso contrário, repetir o processo.

Exercício

Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel.

Sistema linear

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17 \end{cases}$$

Use:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

Critério de parada:

$$\varepsilon < 0,1$$

Objetivo

Determine a aproximação final e o número de iterações.

Exercício: isolando as variáveis

Isole cada variável do sistema:

$$-3x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 = \frac{2 - x_2 - x_3}{-3}$$

$$x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$$

$$x_2 = \frac{5 - x_1 - x_3}{5}$$

$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17$$

$$x_3 = \frac{-17 - x_1 - 3x_2}{7}$$

Lembrete
No Gauss-Seidel, o valor novo já é usado imediatamente.

Exercício: primeira iteração

Usando:

$$x^{(0)} = (0, 0, 0)$$

$$x_1^{(1)} = \frac{2 - 0 - 0}{-3} = -0,6667$$

Agora usamos $x_1^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = \frac{5 - (-0,6667) - 0}{5}$$

$$x_2^{(1)} = 1,1333$$

Agora usamos $x_1^{(1)}$ e $x_2^{(1)}$:

$$x_3^{(1)} = \frac{-17 - (-0,6667) - 3(1,1333)}{7}$$

$$x_3^{(1)} = -2,8190$$

Portanto:

$$x^{(1)} = (-0,6667;\ 1,1333;\ -2,8190)$$

Exercício: segunda iteração

Usando:

$$x^{(1)} = (-0,6667;\ 1,1333;\ -2,8190)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{2 - 1,1333 - (-2,8190)}{-3}$$

$$x_1^{(2)} = -1,2286$$

$$x_2^{(2)} = \frac{5 - (-1,2286) - (-2,8190)}{5}$$

$$x_2^{(2)} = 1,8095$$

$$x_3^{(2)} = \frac{-17 - (-1,2286) - 3(1,8095)}{7}$$

$$x_3^{(2)} = -3,0286$$

Portanto:

$$x^{(2)} = (-1,2286;\ 1,8095;\ -3,0286)$$

Exercício: erro da segunda iteração

Temos:

$$x^{(1)} = (-0,6667;\ 1,1333;\ -2,8190)$$

$$x^{(2)} = (-1,2286;\ 1,8095;\ -3,0286)$$

Diferenças:

$$|-1,2286 + 0,6667| = 0,5619$$

$$|1,8095 - 1,1333| = 0,6762$$

$$|-3,0286 + 2,8190| = 0,2096$$

Maior diferença:

$$\max = 0,6762$$

Maior valor da nova aproximação:

$$\max |x_i^{(2)}| = 3,0286$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{0,6762}{3,0286}$$

$$\varepsilon \approx 0,223$$

$$0,223 > 0,1$$

Exercício: terceira iteração

Usando:

$$x^{(2)} = (-1,2286;\ 1,8095;\ -3,0286)$$

$$x_1^{(3)} = \frac{2 - 1,8095 - (-3,0286)}{-3}$$

$$x_1^{(3)} = -1,0730$$

$$x_2^{(3)} = \frac{5 - (-1,0730) - (-3,0286)}{5}$$

$$x_2^{(3)} = 1,8203$$

$$x_3^{(3)} = \frac{-17 - (-1,0730) - 3(1,8203)}{7}$$

$$x_3^{(3)} = -3,0554$$

Portanto:

$$x^{(3)} = (-1,0730;\ 1,8203;\ -3,0554)$$

Exercício: erro da terceira iteração

Temos:

$$x^{(2)} = (-1,2286;\ 1,8095;\ -3,0286)$$

$$x^{(3)} = (-1,0730;\ 1,8203;\ -3,0554)$$

Diferenças:

$$|-1,0730 + 1,2286| = 0,1556$$

$$|1,8203 - 1,8095| = 0,0108$$

$$|-3,0554 + 3,0286| = 0,0268$$

Maior diferença:

$$\max = 0,1556$$

Maior valor da nova aproximação:

$$\max |x_i^{(3)}| = 3,0554$$

Assim:

$$\varepsilon = \frac{0,1556}{3,0554}$$

$$\varepsilon \approx 0,051$$

$$0,051 < 0,1$$

Exercício: resultado esperado

Como:

$$\varepsilon \approx 0,051 < 0,1$$

o método atingiu o critério de parada.

Aproximação obtida

$$x_1 \approx -1,073$$

$$x_2 \approx 1,820$$

$$x_3 \approx -3,055$$

Número de iterações

O método convergiu em:

3 iterações

Critério usado

$$\varepsilon < 0,1$$

Comparação final

Para o sistema do exercício:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -17 \end{cases}$$

usando $x^{(0)} = (0, 0, 0)$ e $\varepsilon < 0,1$:

Gauss-Jacobi

3 iterações

$x \approx (-1,048;\ 1,781;\ -2,959)$

Gauss-Seidel

3 iterações

$x \approx (-1,073;\ 1,820;\ -3,055)$

Resumo da aula

- Gauss-Seidel é um método iterativo para resolver sistemas lineares.
- Ele é parecido com Gauss-Jacobi.
- A diferença é que Gauss-Seidel usa imediatamente os valores novos.
- O critério de parada compara duas aproximações consecutivas.
- Em muitos casos, Gauss-Seidel converge mais rapidamente ou se aproxima mais da solução.

Ideia principal

No Gauss-Seidel, calculou um valor novo, já usa esse valor no próximo cálculo.