# Cálculo Numérico

**Um guia prático com Python**

**Prof. Dr. Rogério Vargas**[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

**2026**

rogerio.in

UFPR

Dos pontos conhecidos aos valores estimados Calculos manuais, Excel e apoio orientado de IA

# Encontro 1: Interpolacao linear e Lagrange

# Roteiro do encontro (4 horas-aula)

1. 30 min: exemplo do sensor e interpolacao linear.
2. 50 min: distancia euclidiana no Excel e subdivisao.
3. 50 min: formula e construcao de Lagrange.
4. 50 min: Lagrange no Excel, grafico e discussao.
5. 20 min: verificacao e fechamento.

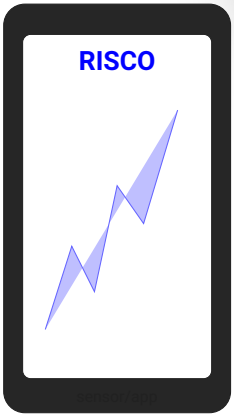
**Combinado**
Depois do primeiro exemplo de distancia, abriremos o Excel. IA pode explicar a formula, mas cada resultado deve ser conferido.

# Um sensor não mede tudo o tempo todo

Imagine um sensor ambiental registrando a cota de um rio.

- Às 08:00, a cota era de $1{,}21$ m.
- Às 08:15, a cota era de $1{,}49$ m.
- Mas precisamos saber a cota às 08:07.

**Pergunta**
Como estimar um valor que não foi medido?



# Escolhendo uma hipótese

Temos apenas dois dados:

| Horário | Cota do rio |
|---|---|
| 08:00 | $1{,}21$ m |
| 08:15 | $1{,}49$ m |

**Objetivo**
Estimar a cota às 08:07.

Poderíamos imaginar várias estratégias:

- fazer um chute;
- usar uma média;
- desenhar uma curva;
- ligar os pontos por uma reta.

**Hipótese de hoje**
Entre dois pontos conhecidos, vamos aproximar o comportamento por uma reta.

# Transformando o problema em pontos

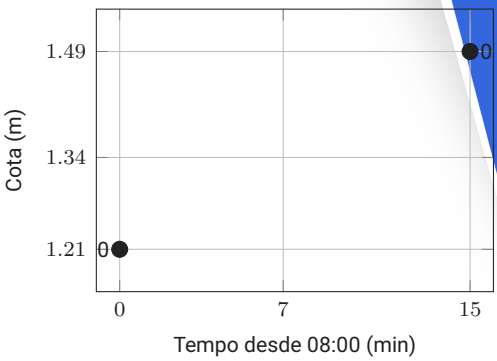
Medimos o tempo em minutos a partir das 08:00.

$$
\begin{aligned}
08{:}00 &\quad \Rightarrow \quad x = 0 \\
08{:}07 &\quad \Rightarrow \quad x = 7 \\
08{:}15 &\quad \Rightarrow \quad x = 15
\end{aligned}
$$

Os pontos conhecidos são:

$$(0,\ 1{,}21) \quad \text{e} \quad (15,\ 1{,}49)$$

**Objetivo**
Estimar a cota no ponto $x = 7$.



# Interpolação linear

A variação total da cota foi:

$$1{,}49 - 1{,}21 = 0{,}28 \text{ m}$$

Em 15 minutos, o rio subiu $0{,}28$ m.

Em 7 minutos, percorremos a fração:

$$\frac{7}{15}$$

do intervalo total.

Logo:

$$C(7) = 1{,}21 + \frac{7}{15}(1{,}49 - 1{,}21)$$

$$C(7) \approx 1{,}341 \text{ m}$$

**Ideia**
Partimos do valor inicial e somamos uma fração da variação total.

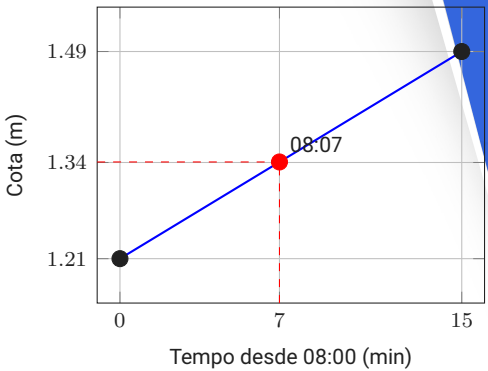
# Visualizando a interpolação linear

A ideia é ligar os dois pontos conhecidos por uma reta.

Isso significa assumir que, entre 08:00 e 08:15, a cota variou de forma aproximadamente linear.

**Resultado**
A estimativa para 08:07 é:

$$C(7) \approx 1{,}341 \text{ m}$$



# A fórmula geral

Dados dois pontos:

$$(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad (x_1, y_1)$$

queremos estimar o valor de $f(x)$ para um ponto $x$ entre $x_0$ e $x_1$.

**Interpolador linear**

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

A fração

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

indica quanto já caminhamos de $x_0$ até $x_1$.

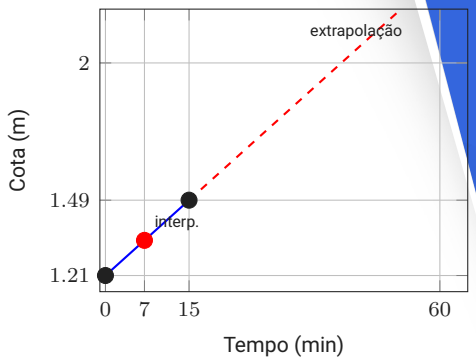
# Interpolação ou extrapolação?

Usando os dados das 08:00 e das 08:15:

- estimar às 08:07 é interpolar;
- estimar às 09:00 é extrapolar.

**Interpolação**
Estimativa dentro do intervalo dos dados conhecidos.

**Extrapolação**
Estimativa fora do intervalo dos dados conhecidos.



# O interpolador é uma hipótese

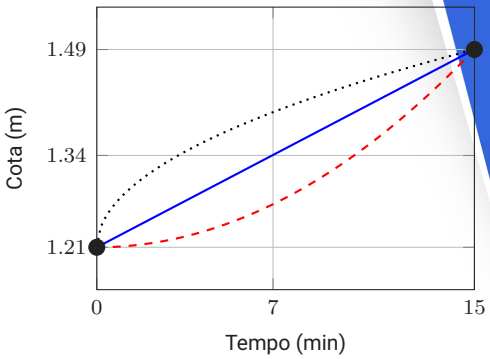
Dois pontos não contam toda a história.

Entre 08:00 e 08:15, o rio poderia ter se comportado de várias formas:

- subida quase linear;
- subida mais forte no início ou fim final;
- pequenas oscilações.

**Conclusão**

O interpolador não descobre a função verdadeira. Ele constrói uma aproximação.



# Coordenadas iniciais

| Ponto | x | y |
|---|---|---|
| $P_1$ | 1,56 | 1,56 |
| $P_2$ | 3,75 | 0,58 |
| $P_3$ | 5,99 | 8,66 |
| $P_4$ | 7,32 | 6,01 |
| $P_5$ | 9,51 | 7,08 |

**Objetivo computacional**

Primeiro calcular a distância euclidiana entre pontos consecutivos no Excel; depois inserir novos pontos quando a distância superar 2 unidades.

# Distância entre dois pontos

### Distância euclidiana

Dados dois pontos:

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2),$$

a distância entre eles é:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

### Uso no algoritmo

Se $d > 2$, o segmento será subdividido em partes menores.

### Quantidade de partes

$$m = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil$$

Assim, cada novo trecho terá comprimento aproximado:

$$\frac{d}{m} \leq 2.$$

# Cálculo das distâncias: primeira tentativa

**Vamos calcular apenas o primeiro segmento**

$P_1 = (1{,}56; 1{,}56)$ e $P_2 = (3{,}75; 0{,}58)$.

$$d_{12} = \sqrt{(3{,}75 - 1{,}56)^2 + (0{,}58 - 1{,}56)^2} = \sqrt{(2{,}19)^2 + (-0{,}98)^2}$$

$$d_{12} \approx 2{,}399 \qquad \Longrightarrow \qquad m = \left\lceil \frac{2{,}399}{2} \right\rceil = 2.$$

**Desafio: e os outros três segmentos?**

Em vez de repetir os cálculos manualmente, vamos **automatizar no Excel** e conferir os resultados.

# Prática imediata: distância euclidiana no Excel

## 1. Digite os pontos na planilha (A1:C6)

| A: Ponto | B: x | C: y |
|---|---|---|
| $P_1$ | 1,56 | 1,56 |
| $P_2$ | 3,75 | 0,58 |
| $P_3$ | 5,99 | 8,66 |
| $P_4$ | 7,32 | 6,01 |
| $P_5$ | 9,51 | 7,08 |

## 2. Em D1, digite `Distancia`; em D2, a fórmula

```
=RAIZ((B3-B2)^2+(C3-C2)^2)
```

**Faça agora (5 minutos)**

Pressione Enter e arraste a fórmula de D2 até D5. **O valor de D2 deve ser próximo de 2,399.**

# Prática no Excel: quantas partes precisamos?

## Regra para cada segmento

Queremos que o comprimento de cada parte não ultrapasse 2 unidades:

$$m = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil, \qquad \ell = \frac{d}{m} \leq 2.$$

## Complete três novas colunas

E1: `Partes` E2: `=ARREDONDAR.PARA.CIMA(D2/2;0)`

F1: `Dist./parte` F2: `=D2/E2`

Arraste E2:F2 até a linha 5.

## Perguntas para a turma

Qual segmento exige mais partes? Algum resultado da coluna F ultrapassa 2? Por quê?

# Conferindo a planilha: resultados esperados

| Segmento | Distância ($d$) | Partes ($m$) | $d/m$ |
|---|---|---|---|
| $P_1P_2$ | 2,399 | 2 | 1,200 |
| $P_2P_3$ | 8,385 | 5 | 1,677 |
| $P_3P_4$ | 2,965 | 2 | 1,483 |
| $P_4P_5$ | 2,437 | 2 | 1,219 |

**O que acabamos de automatizar?**

A fórmula usa referências relativas. Ao arrastá-la, o Excel muda B3-B2 para B4-B3, depois B5-B4 e assim por diante.

**Conexão com a próxima parte**

Já sabemos *quantas partes* criar. Falta descobrir *as coordenadas* dos pontos intermediários.

# E se a fórmula não funcionar? Excel e IA como apoio

## Checklist antes de pedir ajuda

1. Confira se digitou os números com **vírgula decimal**.
2. Veja se D2 usa os valores de B2, C2, B3 e C3.
3. Confirme o nome da função `RAIZ` e o separador `;` quando houver argumentos.
4. Verifique se a fórmula começa com =.

## Exemplo de pergunta à IA

*"Estou calculando distância euclidiana no Excel em português. Explique cada parte da fórmula =RAIZ((B3-B2)^2+(C3-C2)^2), mas não faça a atividade por mim."*

## Regra da oficina

A IA ajuda a entender. A dupla deve explicar o cálculo e conferir um resultado manualmente.

# Como surgem os novos pontos?

**Ideia geométrica**

Quando a distância entre dois pontos consecutivos é maior que $2$, subdividimos o **segmento de reta** que une esses pontos em partes iguais.

**Mensagem importante**

Os novos pontos aparecem porque avançamos proporcionalmente em $x$ e em $y$ ao longo do segmento.

**Novas coordenadas**

$$P_i = (x_i, y_i)$$

e

$$P_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}),$$

se o segmento for dividido em $m$ partes, então:

$$x_k = x_i + k \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{m}$$

$$y_k = y_i + k \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{m}$$

com:

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

# Exemplo: subdividindo o segmento $P_2P_3$

Temos os pontos: $P_2 = (3{,}750,\ 0{,}580)$ e $P_3 = (5{,}990,\ 8{,}660)$
A distância entre eles é maior que $2$, então o segmento foi dividido em: $m = 5$.
Isso significa que o segmento será dividido em **5 partes iguais**.

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

**Atenção**
Como $m = 5$, temos 5 partes, mas apenas **4 novos pontos internos**.
Os valores $k = 0$ e $k = 5$ representam os pontos que já existiam:

$$k = 0 \Rightarrow P_2 \qquad k = 5 \Rightarrow P_3$$

# Gerando os novos pontos de $P_2$ até $P_3$

Usamos: $x_k = 3{,}750 + k \cdot 0{,}448$ e $y_k = 0{,}580 + k \cdot 1{,}616$ com:

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

| $k$ | Ponto | $x_k$ | $y_k$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $P_2$ | 3,750 | 0,580 |
| 1 | $Q_2$ | 4,198 | 2,196 |
| 2 | $Q_3$ | 4,646 | 3,812 |
| 3 | $Q_4$ | 5,094 | 5,428 |
| 4 | $Q_5$ | 5,542 | 7,044 |
| 5 | $P_3$ | 5,990 | 8,660 |

**Resumo**

A sequência gerada é:

$$P_2 \to Q_2 \to Q_3 \to Q_4 \to Q_5 \to P_3$$

# Oficina Excel: criando os pontos intermediários

## Agora vamos calcular as coordenadas, sem digitar cada ponto

O segmento de $P_2$ a $P_3$ foi dividido em $m = 5$. Em G1:J1, crie os títulos: `k`, `t=k/m`, `x novo`, `y novo`.

## Preencha e arraste

Em G2:G7, digite $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Depois:

- H2: `=G2/5`
- I2: `=$B$3+H2*($B$4-$B$3)`
- J2: `=$C$3+H2*($C$4-$C$3)`

Copie H2:J2 até a linha 7.

## Confira e visualize

Para $k = 1$, obtenha $(4{,}198; 2{,}196)$. Faça um gráfico de dispersão (XY) com os pontos do segmento.

# Valores de $x$ para os interpoladores

## Valores de $x$ obtidos a partir da subdivisão

A partir das coordenadas geradas, usaremos os seguintes valores de $x$:

$$1{,}56, \quad 2{,}655, \quad 3{,}75, \quad 4{,}198, \quad 4{,}646, \quad 5{,}094,$$

$$5{,}542, \quad 5{,}99, \quad 6{,}655, \quad 7{,}32, \quad 8{,}415, \quad 9{,}51.$$

## Ideia da comparação

Na interpolação linear, os valores de $y$ são os da própria tabela de subdivisão. Agora, usaremos esses mesmos valores de $x$ e calcularemos novos valores de $y$ com Lagrange, Newton e Spline Cúbica.

## Observação importante

Para alguns interpoladores, a distância euclidiana entre pontos consecutivos pode não ficar exatamente limitada a $2$, pois a curva deixa de ser o segmento de reta usado na subdivisão original.

# Interpolador de Lagrange: ideia

**Ideia principal**

O método de Lagrange constrói um único polinômio que passa por todos os pontos conhecidos.

**No nosso exemplo**

Temos $5$ pontos:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5.$$

Logo, o polinômio interpolador terá grau no máximo $4$:

$$P_4(x).$$

**Atenção**

Esse polinômio é global: ele usa todos os pontos ao mesmo tempo.

# Pontos usados no interpolador

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1,56 | 1,56 |
| 1 | 3,75 | 0,58 |
| 2 | 5,99 | 8,66 |
| 3 | 7,32 | 6,01 |
| 4 | 9,51 | 7,08 |

**Observação**

Como temos $5$ pontos, usamos $i = 0, 1, 2, 3, 4$ e obtemos um polinômio de grau no máximo $4$.

# Fórmula geral de Lagrange

O polinômio interpolador é:

$$P_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x)$$

onde cada base é:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

**Ideia importante**
Cada $L_i(x)$ vale $1$ no ponto $x_i$ e vale $0$ nos outros pontos.

# Montando a base $L_0(x)$

A base $L_0(x)$ está associada ao ponto:

$$x_0 = 1{,}56.$$

Por isso, usamos todos os outros valores de $x$ no numerador:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

Substituindo:

$$L_0(x) = \frac{(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)(x - 9{,}51)}{(1{,}56 - 3{,}75)(1{,}56 - 5{,}99)(1{,}56 - 7{,}32)(1{,}56 - 9{,}51)}$$

# Calculando o denominador de $L_0(x)$

$$(1{,}56 - 3{,}75)(1{,}56 - 5{,}99)(1{,}56 - 7{,}32)(1{,}56 - 9{,}51)$$

$$= (-2{,}19)(-4{,}43)(-5{,}76)(-7{,}95)$$

$$(-2{,}19)(-4{,}43) = 9{,}7017$$

$$(-5{,}76)(-7{,}95) = 45{,}792$$

$$9{,}7017 \cdot 45{,}792 \approx 444{,}24$$

Logo:

$$L_0(x) = \frac{(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)(x - 9{,}51)}{444{,}24}$$

# Montando o polinômio

A forma geral é:

$$P_4(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) + y_4 L_4(x)$$

Como:

$$y_0 = 1{,}56, \quad y_1 = 0{,}58, \quad y_2 = 8{,}66, \quad y_3 = 6{,}01, \quad y_4 = 7{,}08,$$

temos:

$$P_4(x) = 1{,}56 L_0(x) + 0{,}58 L_1(x) + 8{,}66 L_2(x) + 6{,}01 L_3(x) + 7{,}08 L_4(x)$$

**Ideia**
Cada termo $y_i L_i(x)$ contribui para que o polinômio passe pelo ponto $(x_i, y_i)$.

# Polinômio de Lagrange obtido

## Forma fatorada

A forma anterior é a forma de Lagrange:

$$P_4(x) = \sum_{i=0}^{4} y_i L_i(x).$$

## Forma expandida aproximada

Expandindo os produtos e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$P_4(x) = 0{,}103886x^4 - 2{,}365575x^3 + 18{,}293067x^2$$

$$-53{,}822132x + 49{,}369971.$$

## Observação

A expansão manual é longa. O mais importante é entender que as duas formas representam o mesmo polinômio interpolador.

# Como conferir o polinômio?

O polinômio interpolador deve passar pelos pontos originais.

$$P_4(1{,}56) \approx 1{,}56$$

$$P_4(3{,}75) \approx 0{,}58$$

$$P_4(5{,}99) \approx 8{,}66$$

$$P_4(7{,}32) \approx 6{,}01$$

$$P_4(9{,}51) \approx 7{,}08$$

**Ideia importante**

Se o polinômio não passa pelos pontos originais, houve erro no cálculo.

# Como usar o polinômio?

Depois de obter:

$$P_4(x) = 0{,}103886x^4 - 2{,}365575x^3 + 18{,}293067x^2$$

$$-53{,}822132x + 49{,}369971$$

basta substituir o valor de $x$ desejado.

**Exemplo**

Para estimar o valor em $x = 4{,}20$:

$$P_4(4{,}20) = 0{,}103886(4{,}20)^4 - 2{,}365575(4{,}20)^3$$

$$+18{,}293067(4{,}20)^2 - 53{,}822132(4{,}20) + 49{,}369971.$$

# Novos pontos usando Lagrange

## Valores calculados

| $x$ | $P_4(x)$ |
|---|---|
| 1,560 | 1,560 |
| 2,655 | $-3{,}690$ |
| 3,750 | 0,580 |
| 4,198 | 3,061 |
| 4,646 | 5,345 |
| 5,094 | 7,145 |

## Continuação

| $x$ | $P_4(x)$ |
|---|---|
| 5,542 | 8,278 |
| 5,990 | 8,660 |
| 6,655 | 7,903 |
| 7,320 | 6,010 |
| 8,415 | 3,143 |
| 9,510 | 7,080 |

**Atenção**

O valor em $x = 2{,}655$ ficou negativo. Isso mostra que polinômios globais podem oscilar.

# Oficina Excel 3: Lagrange sem programar

## Agora usamos os cinco pontos originais

Para um valor de consulta $x = 2{,}655$, calcule cada base

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad \text{e} \quad P(x) = \sum_{i=0}^{4} y_i L_i(x).$$

## Organizacao da planilha

Mantenha os cinco valores $x_i$ em B2:B6, $y_i$ em C2:C6 e digite o $x$ consultado em H2. Em D2:D6, coloque uma formula para cada $L_i$, usando as outras quatro abscissas; em E2 use `=C2*D2` e copie ate E6. Finalmente, `=SOMA(E2:E6)`.

## Conferencia

$P(2{,}655) \approx -3{,}690$. Teste tambem $P(x_i) = y_i$ para os cinco pontos originais.

# Atividade final: entenda antes de entregar

1. Compare, no mesmo $x = 2{,}655$, a interpolacao linear e Lagrange.
2. Construa um grafico XY com a serie original e os valores interpolados.
3. Explique por que um polinomio pode gerar um valor negativo entre dados positivos.
4. Altere **um** valor $y_i$ e observe a mudanca na curva.

**IA como tutora, nao como gabarito**
Pergunte: “Explique passo a passo a formula da celula D2. Mostre o calculo manual correspondente e como verificar que a formula esta correta.”