Interpolação de Lagrange

Resolução comentada: das cinco bases à equação de quarto grau

1. Dados originais do exercício

Conhecemos cinco pontos (x_i, y_i). Vamos usar os índices de 0 a 4 porque esta é a notação adotada nas bases de Lagrange.

Ponto	Índice	x_i	y_i
P_0	0	1,56	1,56
P_1	1	3,75	0,58
P_2	2	5,99	8,66
P_3	3	7,32	6,01
P_4	4	9,51	7,08

Nosso objetivo: construir uma única função $P_4(x)$ que reproduza os cinco valores conhecidos de y em seus respectivos valores de x. Como temos cinco abscissas distintas, existe um único polinômio interpolador de grau *no máximo* quatro.

2. O que são as bases L_0, L_1, L_2, L_3, L_4?

Construímos **uma base para cada ponto**. A base $L_i(x)$ deve valer 1 quando $x = x_i$ e 0 nas outras quatro abscissas da tabela. Essa propriedade permite que cada base "selecione" o y de seu ponto.

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{4} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Como ler a fórmula: no numerador entram os quatro fatores $(x - x_j)$ associados aos *outros* pontos; no denominador aparecem os mesmos fatores, mas trocando x pela abscissa x_i do ponto escolhido.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
L_0	**1**	0	0	0	0
L_1	0	**1**	0	0	0
L_2	0	0	**1**	0	0
L_3	0	0	0	**1**	0
L_4	0	0	0	0	**1**

3. Construindo $L_0(x)$: ponto de referência $x_0 = 1{,}56$

Queremos $L_0(1{,}56) = 1$ e zero em 3,75, 5,99, 7,32 e 9,51. Por isso, **não colocamos o fator** $(x-1{,}56)$ **no numerador**.

$$L_0(x) = \frac{(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{(1{,}56-3{,}75)(1{,}56-5{,}99)(1{,}56-7{,}32)(1{,}56-9{,}51)}.$$

Denominador: $(-2{,}19)(-4{,}43)(-5{,}76)(-7{,}95) = \mathbf{444{,}26024640}$.

$$\boxed{L_0(x) = \frac{(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{444{,}26024640}}$$

Conferência: em $x = 1{,}56$, numerador e denominador ficam iguais ($L_0 = 1$); em $x = 3{,}75$, por exemplo, aparece o fator zero ($L_0 = 0$).

4. Construindo $L_1(x)$: ponto de referência $x_1 = 3{,}75$

Agora **retiramos** $(x - 3{,}75)$ **do numerador**. Queremos $L_1(3{,}75) = 1$ e zero nos outros quatro valores conhecidos.

$$L_1(x) = \frac{(x-1{,}56)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{(3{,}75-1{,}56)(3{,}75-5{,}99)(3{,}75-7{,}32)(3{,}75-9{,}51)}.$$

Denominador: $(2{,}19)(-2{,}24)(-3{,}57)(-5{,}76) = \mathbf{-100{,}87483392}$.

$$\boxed{L_1(x) = \frac{(x-1{,}56)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{-100{,}87483392}}$$

Conferência: $L_1(3{,}75) = 1$; em $x = 5{,}99$, o fator $(x - 5{,}99)$ anula o numerador.

5. Construindo $L_2(x)$: ponto de referência $x_2 = 5{,}99$

Retiramos $(x - 5{,}99)$ do numerador. Assim, a base poderá valer 1 em 5,99 e 0 nos outros pontos.

$$L_2(x) = \frac{(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{(5{,}99-1{,}56)(5{,}99-3{,}75)(5{,}99-7{,}32)(5{,}99-9{,}51)}.$$

Denominador: $(4{,}43)(2{,}24)(-1{,}33)(-3{,}52) = \mathbf{46{,}45645312}$.

$$\boxed{L_2(x) = \frac{(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{46{,}45645312}}$$

6. Construindo $L_3(x)$: ponto de referência $x_3 = 7{,}32$

Retiramos $(x - 7{,}32)$ do numerador; no denominador, usamos 7,32 como abscissa fixa.

$$L_3(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 9{,}51)}{(7{,}32 - 1{,}56)(7{,}32 - 3{,}75)(7{,}32 - 5{,}99)(7{,}32 - 9{,}51)}.$$

Denominador: $(5{,}76)(3{,}57)(1{,}33)(-2{,}19) = \mathbf{-59{,}89443264}$.

$$\boxed{L_3(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 9{,}51)}{-59{,}89443264}}$$

Conferência: $L_3(7{,}32) = 1$; nos demais valores conhecidos, um fator do numerador é zero.

7. Construindo $L_4(x)$: ponto de referência $x_4 = 9{,}51$

Retiramos $(x - 9{,}51)$ do numerador; no denominador, usamos 9,51 como abscissa fixa.

$$L_4(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)}{(9{,}51 - 1{,}56)(9{,}51 - 3{,}75)(9{,}51 - 5{,}99)(9{,}51 - 7{,}32)}.$$

Denominador: $(7{,}95)(5{,}76)(3{,}52)(2{,}19) = \mathbf{353{,}00136960}$.

$$\boxed{L_4(x) = \frac{(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)}{353{,}00136960}}$$

Até aqui: construímos cinco *funções*, não cinco resultados numéricos finais. Em qualquer valor de x que escolhamos, podemos avaliar cada $L_i(x)$. Mas para formar o interpolador precisamos ainda dos valores de y informados no problema.

8. Como juntar as cinco bases?

A regra é muito simples: **multiplicar cada base $L_i(x)$ pela ordenada y_i do mesmo ponto, depois somar os cinco termos**. Veja a correspondência:

Ponto	Valor conhecido de y	Base construída	Termo da soma
P_0	1,56	$L_0(x)$	$1{,}56L_0(x)$
P_1	0,58	$L_1(x)$	$0{,}58L_1(x)$
P_2	8,66	$L_2(x)$	$8{,}66L_2(x)$
P_3	6,01	$L_3(x)$	$6{,}01L_3(x)$
P_4	7,08	$L_4(x)$	$7{,}08L_4(x)$

9. O polinômio $P_4(x)$ finalmente montado

Somando os cinco termos da tabela:

$$\boxed{P_4(x) = 1{,}56L_0(x) + 0{,}58L_1(x) + 8{,}66L_2(x) + 6{,}01L_3(x) + 7{,}08L_4(x)}$$

Esta **já é a equação do polinômio interpolador**, escrita na forma de Lagrange. Se substituirmos as bases construídas, obtemos a fórmula completa abaixo (sem expandir os produtos):

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & \frac{1{,}56\,(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{444{,}26024640} \\ & + \frac{0{,}58\,(x-1{,}56)(x-5{,}99)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{-100{,}87483392} \\ & + \frac{8{,}66\,(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-7{,}32)(x-9{,}51)}{46{,}45645312} \\ & + \frac{6{,}01\,(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-9{,}51)}{-59{,}89443264} \\ & + \frac{7{,}08\,(x-1{,}56)(x-3{,}75)(x-5{,}99)(x-7{,}32)}{353{,}00136960}. \end{aligned}$$

Esta é a forma de Lagrange. Ela já é um polinômio completo, mas vamos desenvolvê-la para obter uma equação mais simples de usar no Excel: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

10. Transformando a forma de Lagrange em uma equação comum

Nossa meta agora é passar da soma de cinco parcelas, cada qual com quatro fatores, para a forma:

$$P_4(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Ideia central: desenvolver os produtos dos numeradores, multiplicar cada resultado pela constante y_i/D_i e, por fim, somar os coeficientes de potências iguais.

11. Um desenvolvimento completo: a parcela de $L_0(x)$

Vamos começar com a primeira parcela, $y_0 L_0(x)$:

$$1{,}56L_0(x) = \frac{1{,}56}{444{,}26024640}(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)(x - 9{,}51).$$

Multiplicamos primeiro os fatores dois a dois (os termos com vírgula são decimais):

$$\begin{aligned}(x - 3{,}75)(x - 5{,}99) &= x^2 - 9{,}74x + 22{,}4625,\\ (x - 7{,}32)(x - 9{,}51) &= x^2 - 16{,}83x + 69{,}4932.\end{aligned}$$

Multiplicando os dois polinômios quadráticos, obtemos:

$$\begin{aligned}&(x^2 - 9{,}74x + 22{,}4625)(x^2 - 16{,}83x + 69{,}4932)\\ &\quad = x^4 - 26{,}57x^3 + 255{,}9999x^2 - 1056{,}076443x + 1563{,}686505.\end{aligned}$$

Agora multiplicamos cada coeficiente pelo mesmo fator $1{,}56/444{,}26024640$:

$$\begin{aligned}1{,}56L_0(x) \approx\ & 0{,}0035114553x^4 - 0{,}0932993675x^3\\ &+ 0{,}8989322075x^2 - 3{,}7083652306x + 5{,}4908152768.\end{aligned}$$

> **Atenção:** isso é só a *primeira parcela* da soma! Ainda precisamos fazer o mesmo com $0{,}58L_1(x)$, $8{,}66L_2(x)$, $6{,}01L_3(x)$ e $7{,}08L_4(x)$. Para poupar contas repetitivas na aula, apresentamos seus coeficientes na tabela a seguir.

12. Reunindo os coeficientes das cinco parcelas

Cada linha da tabela é uma parcela $y_i L_i(x)$ *depois de expandida*. Cada coluna corresponde ao coeficiente de uma potência de x.

Parcela	x^4	x^3	x^2	x	Constante
$y_0 L_0$	+0,00351146	−0,09329937	+0,89893221	−3,70836523	+5,49081528
$y_1 L_1$	−0,00574970	+0,14017768	−1,18457670	+3,92615892	−3,74014276
$y_2 L_2$	+0,18641113	−4,12714246	+30,72624004	−87,25934751	+75,91355104
$y_3 L_3$	−0,10034322	+2,08814233	−14,56179749	+39,45080028	−33,43884145
$y_4 L_4$	+0,02005658	−0,37345351	+2,41426863	−6,23137882	+5,14458843
Soma $P_4(x)$	+0,10388625	−2,36557533	+18,29306668	−53,82213235	+49,36997054

Como ler: para descobrir a, somamos a coluna x^4; para descobrir b, somamos a coluna x^3; e assim por diante até o termo constante e.

13. Equação final simplificada do polinômio

Somando os coeficientes de cada coluna, encontramos o polinômio interpolador de quarto grau:

$$\boxed{\begin{aligned} P_4(x) \approx\ & 0{,}1038862506x^4 - 2{,}3655753255x^3 \\ & + 18{,}2930666822x^2 - 53{,}8221323500x \\ & + 49{,}3699705419. \end{aligned}}$$

O que mudou? Nada no polinômio: ele é exatamente a mesma função que a soma $y_0L_0(x) + \cdots + y_4L_4(x)$, apenas com as multiplicações desenvolvidas. Os decimais apresentados são arredondamentos dos coeficientes exatos.

14. Usando o polinômio: exemplo $x = 4{,}198$

Agora o aluno não precisa recalcular cinco bases. Basta substituir $x = 4{,}198$ na equação final:

$$\begin{aligned} P_4(4{,}198) \approx\ & 0{,}1038862506(4{,}198)^4 \\ & - 2{,}3655753255(4{,}198)^3 \\ & + 18{,}2930666822(4{,}198)^2 \\ & - 53{,}8221323500(4{,}198) + 49{,}3699705419. \end{aligned}$$

$$\boxed{P_4(4{,}198) \approx 3{,}06132664.}$$

Portanto, o ponto obtido por interpolação de Lagrange é aproximadamente (4,198; 3,06132664).

15. Como colocar no Excel

Digite 4,198 na célula **A2**. Em **B2**, insira a fórmula (Excel em português):

```
=0,1038862506*A2^4-2,3655753255*A2^3
+18,2930666822*A2^2-53,8221323500*A2+49,3699705419
```

Mude o valor de **A2** para calcular outros pontos. Como os coeficientes foram arredondados, pode haver pequenas diferenças numéricas; manter mais casas decimais reduz essas diferenças.

16. Por que sabemos que ele passa pelos pontos?

Vamos conferir um ponto original: em $x = 3{,}75$, sabemos que $L_1(3{,}75) = 1$ e todas as outras bases valem 0. Logo:

$$P_4(3{,}75) = 1{,}56(0) + 0{,}58(1) + 8{,}66(0) + 6{,}01(0) + 7{,}08(0) = \boxed{0{,}58}.$$

Isso recupera exatamente a ordenada do ponto $P_1 = (3{,}75; 0{,}58)$. O mesmo raciocínio vale para os demais quatro pontos.

Conclusão didática: construímos as cinco bases para entender o método; depois reunimos os coeficientes em uma única equação de quarto grau. Para avaliar novos valores de x, o aluno pode usar a equação simplificada. Para conferir a lógica do método, pode usar a soma das cinco bases: ambas representam o mesmo polinômio.