Cálculo Numérico

Um guia prático com Python

Prof. Dr. Rogério Vargas[1]

[1]Centro de Estudos do Mar
Universidade Federal do Paraná

2026

rogerio.in

UFPR



Encontro 24: Interpoladores

Ligação com a aula anterior

O que fizemos na aula anterior?
Na aula anterior, usamos o **interpolador linear e lagrange** para inserir pontos intermediários entre pontos conhecidos.

Regra computacional
Percorrer os pontos consecutivos e inserir novos pontos quando a distância entre eles for maior que 2 unidades.

O que faremos nesta aula?
Vamos manter o mesmo problema e comparar outros interpoladores:

- Interpolador de Newton;
- Splines.

Interpolador de Newton: ideia

Ideia principal

O método de Newton constrói o mesmo polinômio interpolador de Lagrange, mas usando uma tabela de diferenças divididas.

Forma de Newton

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Importante

Lagrange e Newton geram o mesmo polinômio. A diferença está na forma de calcular e escrever esse polinômio.

Pontos usados no método de Newton

i	x_i	$f[x_i] = y_i$
0	1,56	1,56
1	3,75	0,58
2	5,99	8,66
3	7,32	6,01
4	9,51	7,08

Objetivo

Calcular os coeficientes:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

usando diferenças divididas.

Primeira diferença dividida

Fórmula

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

Interpretação

A primeira diferença dividida é parecida com o coeficiente angular da reta entre dois pontos.

Exemplo entre x_0 e x_1

$$f[x_0, x_1] = \frac{0{,}58 - 1{,}56}{3{,}75 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{-0{,}98}{2{,}19} \approx -0{,}447489$$

Primeiras diferenças divididas

$$f[x_0, x_1] = \frac{0{,}58 - 1{,}56}{3{,}75 - 1{,}56} = \frac{-0{,}98}{2{,}19} \approx -0{,}447489$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{8{,}66 - 0{,}58}{5{,}99 - 3{,}75} = \frac{8{,}08}{2{,}24} \approx 3{,}607143$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{6{,}01 - 8{,}66}{7{,}32 - 5{,}99} = \frac{-2{,}65}{1{,}33} \approx -1{,}992481$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{7{,}08 - 6{,}01}{9{,}51 - 7{,}32} = \frac{1{,}07}{2{,}19} \approx 0{,}488584$$

Segunda diferença dividida

Fórmula

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Exemplo

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3{,}607143 - (-0{,}447489)}{5{,}99 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{4{,}054632}{4{,}43} \approx 0{,}915267$$

Segunda diferenças divididas

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{3{,}607143 - (-0{,}447489)}{5{,}99 - 1{,}56} \approx 0{,}915267$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-1{,}992481 - 3{,}607143}{7{,}32 - 3{,}75}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-5{,}599624}{3{,}57} \approx -1{,}568522$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}488584 - (-1{,}992481)}{9{,}51 - 5{,}99}$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{2{,}481065}{3{,}52} \approx 0{,}704848$$

Terceira diferença dividida

Fórmula

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}$$

Primeira terceira diferença

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1{,}568522 - 0{,}915267}{7{,}32 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-2{,}483789}{5{,}76} \approx -0{,}431213$$

Terceira diferença dividida

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{-1{,}568522 - 0{,}915267}{7{,}32 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] \approx -0{,}431213$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}704848 - (-1{,}568522)}{9{,}51 - 3{,}75}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{2{,}273370}{5{,}76} \approx 0{,}394682$$

Quarta diferença dividida

Fórmula

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}394682 - (-0{,}431213)}{9{,}51 - 1{,}56}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{0{,}825895}{7{,}95}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \approx 0{,}103886$$

Tabela de diferenças divididas

i	x_i	$f[x_i]$	1ª dif.	2ª dif.	3ª dif.	4ª dif.
0	1,56	1,56	−0,447489	0,915267	−0,431213	0,103886
1	3,75	0,58	3,607143	−1,568522	0,394682	
2	5,99	8,66	−1,992481	0,704848		
3	7,32	6,01	0,488584			
4	9,51	7,08				

Coeficientes de Newton

Os coeficientes aparecem na primeira linha da tabela.

Coeficientes de Newton

A partir da primeira linha da tabela:

$$a_0 = f[x_0] = 1{,}56$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = -0{,}447489$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = 0{,}915267$$

$$a_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -0{,}431213$$

$$a_4 = f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = 0{,}103886$$

Montando o polinômio de Newton

A forma é:

$$P_4(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$+a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$+a_4(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Substituindo:

$$P_4(x) = 1{,}56 - 0{,}447489(x - 1{,}56)$$

$$+0{,}915267(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)$$

$$-0{,}431213(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)$$

$$+0{,}103886(x - 1{,}56)(x - 3{,}75)(x - 5{,}99)(x - 7{,}32)$$

Como usar o polinômio de Newton?

Para calcular, por exemplo, em $x = 4{,}20$:

$$P_4(4{,}20) = 1{,}56 - 0{,}447489(4{,}20 - 1{,}56)$$

$$+0{,}915267(4{,}20 - 1{,}56)(4{,}20 - 3{,}75)$$

$$-0{,}431213(4{,}20 - 1{,}56)(4{,}20 - 3{,}75)(4{,}20 - 5{,}99)$$

$$+0{,}103886(4{,}20 - 1{,}56)(4{,}20 - 3{,}75)(4{,}20 - 5{,}99)(4{,}20 - 7{,}32)$$

Resultado esperado

O valor será o mesmo obtido pelo polinômio de Lagrange, pois os dois representam o mesmo interpolador.

Newton e Lagrange: comparação

Conclusão prática

Newton e Lagrange produzem o mesmo polinômio interpolador.

x	Lagrange	Newton
1,560	1,560	1,560
2,655	−3,690	−3,690
3,750	0,580	0,580
5,094	7,145	7,145
5,990	8,660	8,660
7,320	6,010	6,010
8,415	3,143	3,143
9,510	7,080	7,080

Diferença

A diferença está na construção: Lagrange usa bases $L_i(x)$; Newton usa diferenças divididas.

Splines: ideia principal

Mudança de estratégia

Lagrange e Newton usam um único polinômio global para todos os pontos.
Splines usam polinômios por partes.

No nosso exemplo

Há quatro intervalos:

$$[1{,}56, 3{,}75], \quad [3{,}75, 5{,}99], \quad [5{,}99, 7{,}32], \quad [7{,}32, 9{,}51].$$

Ideia didática

Cada intervalo terá sua própria função interpoladora.

Spline Linear

Definição
A Spline Linear liga pontos consecutivos por segmentos de reta.

Fórmula no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_i(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

Ligação direta com a aula anterior
A Spline Linear é exatamente o método usado na aula anterior para inserir os pontos ao longo dos segmentos.

Spline linear no primeiro intervalo

Vamos calcular o ponto intermediário entre P_1 e P_2.

$$P_1 = (1{,}56,\ 1{,}56) \qquad P_2 = (3{,}75,\ 0{,}58)$$

O intervalo é:

$$[1{,}56,\ 3{,}75]$$

A Spline Linear nesse intervalo é:

$$S_0(x) = 1{,}56 + \frac{0{,}58 - 1{,}56}{3{,}75 - 1{,}56}(x - 1{,}56)$$

$$S_0(x) = 1{,}56 + \frac{-0{,}98}{2{,}19}(x - 1{,}56)$$

$$S_0(x) = 1{,}56 - 0{,}447489(x - 1{,}56)$$

Calculando $S_0(2{,}655)$

Queremos calcular o valor da Spline Linear no ponto:

$$x = 2{,}655$$

Usando:

$$S_0(x) = 1{,}56 - 0{,}447489(x - 1{,}56)$$

temos:

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 0{,}447489(2{,}655 - 1{,}56)$$

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 0{,}447489(1{,}095)$$

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 0{,}490$$

$$\boxed{S_0(2{,}655) \approx 1{,}070}$$

Spline linear no segundo intervalo

Agora vamos calcular pontos entre P_2 e P_3.

$$P_2 = (3{,}75,\ 0{,}58) \qquad P_3 = (5{,}99,\ 8{,}66)$$

O intervalo é:

$$[3{,}75,\ 5{,}99]$$

A Spline Linear nesse intervalo é:

$$S_1(x) = 0{,}58 + \frac{8{,}66 - 0{,}58}{5{,}99 - 3{,}75}(x - 3{,}75)$$

$$S_1(x) = 0{,}58 + \frac{8{,}08}{2{,}24}(x - 3{,}75)$$

$$S_1(x) = 0{,}58 + 3{,}607143(x - 3{,}75)$$

Calculando um ponto no segundo intervalo

Vamos calcular o valor para: $x = 4{,}198$.
Usando: $S_1(x) = 0{,}58 + 3{,}607143(x - 3{,}75)$
temos:

$$S_1(4{,}198) = 0{,}58 + 3{,}607143(4{,}198 - 3{,}75)$$

$$S_1(4{,}198) = 0{,}58 + 3{,}607143(0{,}448)$$

$$S_1(4{,}198) = 0{,}58 + 1{,}616$$

$$\boxed{S_1(4{,}198) \approx 2{,}196}$$

Observação
Os demais pontos do mesmo intervalo são calculados usando a mesma função $S_1(x)$.

Novos pontos usando Spline Linear

x	$S_{linear}(x)$
1,560	1,560
2,655	1,070
3,750	0,580
4,198	2,196
4,646	3,812
5,094	5,428
5,542	7,044
5,990	8,660
6,655	7,335
7,320	6,010
8,415	6,545
9,510	7,080

Observação

Esses são os pontos obtidos pela interpolação linear da aula anterior.

Spline Cúbica Natural: ideia principal

Mudança em relação à Spline Linear

Na Spline Linear, cada intervalo é representado por uma reta.
Na Spline Cúbica, cada intervalo é representado por um polinômio de grau 3.

Forma geral em cada intervalo

No intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, escrevemos:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Ideia importante

A Spline Cúbica tenta construir uma curva mais suave, evitando mudanças bruscas de direção entre um intervalo e outro.

O que a Spline Cúbica precisa respeitar?

Condição 1: passar pelos pontos

Cada trecho da spline deve passar pelos pontos conhecidos:

$$S_i(x_i) = y_i \qquad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Condição 2: suavidade da curva

Nos pontos de ligação, queremos que a curva encaixe suavemente:

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$

e

$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}).$$

Condição natural

Na Spline Cúbica Natural, impomos:

$$S''(x_0) = 0 \qquad S''(x_n) = 0.$$

Por que os coeficientes não são imediatos?

Na Spline Linear

O coeficiente angular entre dois pontos é calculado diretamente:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Na Spline Cúbica

O coeficiente de cada trecho depende também da suavidade com os trechos vizinhos.
Por isso, os coeficientes são obtidos resolvendo um sistema linear.

Mensagem importante

Na Spline Cúbica, o coeficiente de $(x - x_i)$ não é apenas a inclinação da reta entre dois pontos.
Ele é ajustado para que a curva fique suave.

Notação usada na Spline Cúbica

Tamanho de cada intervalo

Definimos:

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Segundas derivadas

Definimos:

$$M_i = S''(x_i).$$

Esses valores indicam a curvatura da spline nos pontos conhecidos.

Spline Cúbica Natural

Como a spline é natural:

$$M_0 = 0 \qquad M_4 = 0.$$

Pontos usados na Spline Cúbica

i	x_i	y_i
0	1,56	1,56
1	3,75	0,58
2	5,99	8,66
3	7,32	6,01
4	9,51	7,08

Intervalos

Temos quatro intervalos:

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad [x_3, x_4].$$

Calculando os tamanhos dos intervalos

Usando $h_i = x_{i+1} - x_i$

$$h_0 = 3{,}75 - 1{,}56 = 2{,}19$$

$$h_1 = 5{,}99 - 3{,}75 = 2{,}24$$

$$h_2 = 7{,}32 - 5{,}99 = 1{,}33$$

$$h_3 = 9{,}51 - 7{,}32 = 2{,}19$$

Interpretação

Cada h_i representa o comprimento do intervalo no eixo x.

Sistema para encontrar as curvaturas

Para encontrar os valores de M_i, usamos o sistema:

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)M_i + h_iM_{i+1} = 6\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right].$$

Esse sistema é montado apenas para os pontos internos:

$$i = 1, 2, 3.$$

Como a spline é natural:

$$M_0 = 0 \qquad M_4 = 0.$$

Ideia

Os valores M_i são as segundas derivadas da spline nos pontos conhecidos. Eles controlam a curvatura da curva.

Sistema numérico da Spline Cúbica

Substituindo os valores do problema, obtemos:

$$8{,}86M_1 + 2{,}24M_2 = 24{,}327792$$

$$2{,}24M_1 + 7{,}14M_2 + 1{,}33M_3 = -33{,}597745$$

$$1{,}33M_2 + 7{,}04M_3 = 14{,}886390$$

com:

$$M_0 = 0 \qquad M_4 = 0.$$

Solução do sistema

$M_1 \approx 4{,}447723$, $M_2 \approx -6{,}731712$, $M_3 \approx 3{,}386303$

Curvaturas obtidas

i	x_i	$M_i = S''(x_i)$
0	1,56	0
1	3,75	4,447723
2	5,99	−6,731712
3	7,32	3,386303
4	9,51	0

Leitura da tabela

Os extremos têm curvatura zero porque estamos usando a Spline Cúbica Natural.

Como montar cada polinômio da spline?

No intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, usamos: $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$
Os coeficientes são:

$$a_i = y_i$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1})$$

$$c_i = \frac{M_i}{2}$$

$$d_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}$$

Ideia
Agora os coeficientes deixam de aparecer “do nada”: eles são calculados usando h_i, y_i e as curvaturas M_i.

De onde vem o coeficiente $-2{,}070907$?

No primeiro intervalo:

$$x_0 = 1{,}56, \qquad x_1 = 3{,}75, \qquad h_0 = 2{,}19.$$

Também temos:

$$y_0 = 1{,}56, \qquad y_1 = 0{,}58,$$

$$M_0 = 0, \qquad M_1 = 4{,}447723.$$

O coeficiente b_0 é:

$$b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(2M_0 + M_1)$$

$$b_0 = \frac{0{,}58 - 1{,}56}{2{,}19} - \frac{2{,}19}{6}(2 \cdot 0 + 4{,}447723)$$

$$b_0 = -0{,}447489 - 1{,}623419$$

Montando o primeiro trecho da Spline Cúbica

No primeiro intervalo: $[1{,}56,\ 3{,}75]$ temos:

$$a_0 = y_0 = 1{,}56$$

$$b_0 \approx -2{,}070907$$

$$c_0 = \frac{M_0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$d_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{4{,}447723 - 0}{6 \cdot 2{,}19} \approx 0{,}338487$$

Portanto:

$$S_0(x) = 1{,}56 - 2{,}070907(x - 1{,}56) + 0{,}338487(x - 1{,}56)^3$$

$$1{,}56 \leq x \leq 3{,}75.$$

Trechos da Spline Cúbica Natural I

Primeiro intervalo

$$S_0(x) = 1{,}56 - 2{,}070907(x - 1{,}56) + 0{,}338487(x - 1{,}56)^3$$

$$1{,}56 \leq x \leq 3{,}75$$

Segundo intervalo

$$S_1(x) = 0{,}58 + 2{,}799349(x - 3{,}75)$$

$$+2{,}223861(x - 3{,}75)^2 - 0{,}831803(x - 3{,}75)^3$$

$$3{,}75 \leq x \leq 5{,}99$$

Trechos da Spline Cúbica Natural II

Terceiro intervalo

$$S_2(x) = 8{,}66 + 0{,}241281(x - 5{,}99)$$
$$-3{,}365856(x - 5{,}99)^2 + 1{,}267922(x - 5{,}99)^3$$
$$5{,}99 \leq x \leq 7{,}32$$

Quarto intervalo

$$S_3(x) = 6{,}01 - 1{,}983417(x - 7{,}32)$$
$$+1{,}693151(x - 7{,}32)^2 - 0{,}257710(x - 7{,}32)^3$$
$$7{,}32 \leq x \leq 9{,}51$$

Calculando um ponto com a Spline Cúbica

Vamos calcular o valor da spline em:

$$x = 2{,}655.$$

Esse valor está no intervalo:

$$1{,}56 \leq x \leq 3{,}75.$$

Portanto, usamos:

$$S_0(x) = 1{,}56 - 2{,}070907(x - 1{,}56) + 0{,}338487(x - 1{,}56)^3.$$

Substituindo:

$$S_0(2{,}655) = 1{,}56 - 2{,}070907(2{,}655 - 1{,}56)$$

$$+0{,}338487(2{,}655 - 1{,}56)^3$$

$$S_0(2{,}655) \approx -0{,}263.$$

Novos pontos usando Spline Cúbica Natural

Valores calculados

x	$S_{\text{cúbica}}(x)$
1,560	1,560
2,655	−0,263
3,750	0,580
4,198	2,206
4,646	4,275
5,094	6,340

Continuação

x	$S_{\text{cúbica}}(x)$
5,542	7,951
5,990	8,660
6,655	7,705
7,320	6,010
8,415	5,530
9,510	7,080

O que a Spline Cúbica mostra?

1. Ela passa pelos pontos originais
Assim como Lagrange, Newton e Spline Linear, a Spline Cúbica passa pelos pontos fornecidos inicialmente.

2. Ela é calculada por partes
Cada intervalo tem seu próprio polinômio cúbico:

$$S_0(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x).$$

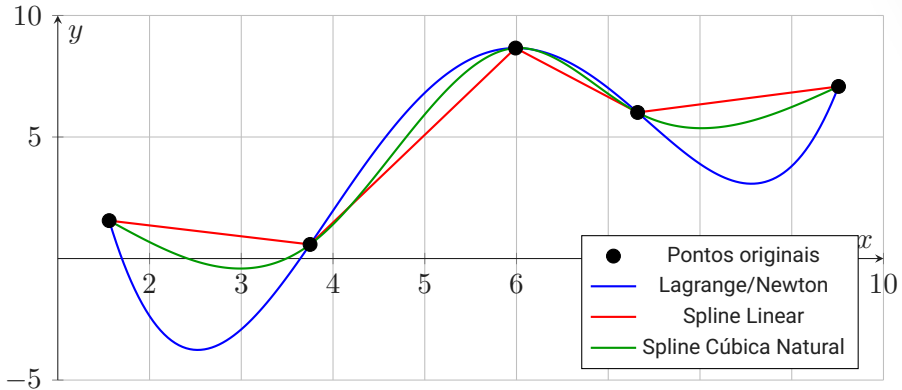
3. Ela é mais suave que a Spline Linear
A curva não muda bruscamente de direção nos pontos de ligação.

Mensagem final
A Spline Cúbica Natural usa curvaturas para ajustar os coeficientes. Por isso, seus valores intermediários podem ser diferentes dos valores da interpolação linear.

Comparação final dos métodos

x	Lagrange	Newton	Spline Linear	Spline Cúbica Natural
1,560	1,560	1,560	1,560	1,560
2,655	−3,690	−3,690	1,070	−0,263
3,750	0,580	0,580	0,580	0,580
4,198	3,061	3,061	2,196	2,206
4,646	5,345	5,345	3,812	4,275
5,094	7,145	7,145	5,428	6,340
5,542	8,278	8,278	7,044	7,951
5,990	8,660	8,660	8,660	8,660
6,655	7,903	7,903	7,335	7,705
7,320	6,010	6,010	6,010	6,010
8,415	3,143	3,143	6,545	5,530
9,510	7,080	7,080	7,080	7,080

Comparação Gráfica



O que devem perceber?

1. Nos pontos originais, todos coincidem
Todos os interpoladores passam pelos pontos fornecidos inicialmente.

2. Nos pontos intermediários, os valores podem ser diferentes
Isso acontece porque cada método constrói uma curva diferente entre os pontos.

3. Lagrange e Newton coincidem entre si
Eles representam o mesmo polinômio global, apenas escrito de maneiras diferentes.

4. Polinômios globais podem oscilar
O valor negativo obtido por Lagrange/Newton perto de $x = 2{,}655$ é um bom exemplo para discutir limitações da interpolação polinomial global.

Síntese Final

Lagrange
Fórmula direta para construir o polinômio interpolador global.

Newton
Mesmo polinômio de Lagrange, mas organizado por diferenças divididas.

Splines
Interpolação por partes, mais ligada à ideia geométrica da aula anterior.

Mensagem Final
A escolha do interpolador afeta diretamente os pontos intermediários gerados. Por isso, é importante entender o comportamento de cada método, não apenas aplicar a fórmula.

Exercício

Atividade

Repita o processo com outro conjunto de pontos:

$$Q_1 = (1, 2), \quad Q_2 = (4, 1), \quad Q_3 = (6, 7), \quad Q_4 = (9, 4).$$

1. Calcule as distâncias entre pontos consecutivos.
2. Subdivida os segmentos cuja distância seja maior que 2.
3. Determine os novos valores de x.
4. Calcule os valores de y usando Lagrange, Newton e Spline Linear.
5. Compare os resultados.